Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXVIII Ciclo

Università di Udine

13 novembre 2012

Tema C

Dissertazioni

1. Le transizioni di fase: descrizione, caratterizzazione e grandezze fisiche per il loro studio.
2. Si discuta il funzionamento di un rivelatore di particelle, evidenziando i principi fisici su cui si basa la rivelazione.
3. Il candidato illustri il concetto di irreversibilità alla luce del secondo principio della termodinamica. Qualora lo desideri, il candidato può anche illustrare un approccio didattico alla questione.
4. Il metodo Monte Carlo nella risoluzione di problemi complessi.
5. Acceleratori di particelle nell'Universo.
6. La formulazione Hamiltoniana per la dinamica di un sistema meccanico e in particolare il concetto di trasformazione canonica.
7. Teoremi di convergenza per successioni di funzioni, nel caso dell'integrale di Riemann e dell'integrale di Lebesgue.
8. Campi vettoriali e il problema dell'esistenza del potenziale.
9. Estensioni di campi.
10. Curvatura di Gauss ed esempi notevoli di classi di superficie.
11. Il metodo di Newton per la ricerca degli zeri di funzioni.
12. Il metodo del simplesso con generazione di colonne in ricerca operativa.

Problemi

Svolgere al più quattro problemi tra i seguenti proposti.

1. L'energia interna di un sistema termodinamico è data dalla seguente espressione $U(S, V, N) = CS^3/(NV)$, dove C è una costante, mentre S, V e N sono l'entropia del sistema, il volume da esso occupato e il numero di particelle che lo compongono. Dopo aver verificato che l'espressione di U descrive un sistema termodinamico: (i) trovare la legge di stato del sistema; (ii) ricavare la legge per una trasformazione adiabatica; (iii) determinare i calori specifici a volume e a pressione costante.

2. Una particella massa m è vincolata a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze conservativo. L'energia potenziale della particella è data dalla seguente

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & \text{se } x \leq -a \\ 0 & \text{se } -a < x < a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

con a costante positiva. Supponendo il sistema a contatto con un termostato a temperatura T, calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media della particella.

3. Una lamina piana infinitamente estesa è sede di una corrente alternata di frequenza w che ha la stessa densità in ogni punto del piano. Determinare come varia nel tempo il campo elettrico in un punto P dello spazio in funzione della sua distanza dal piano stesso.

4. Una particella di massa m in una dimensione è soggetta ad un potenziale della forma $V = \frac{1}{2}kx^2$ per $x > 0$, infinito altrimenti. Qual'è l'energia dello stato fondamentale?

5. Due corpi di capacità termica estremamente elevata si trovano rispettivamente alle temperature T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$). Supponendo che entrambi abbiano un'area superficiale di emissione A e che emettano come corpi neri, determinare l'espressione della massima potenza erogabile da una macchina termica che utilizzi tali corpi come serbatoi di calore.

6. Un'onda piana è polarizzata col suo vettore elettrico lungo z. L'onda si propaga lungo l'asse y. Il campo elettrico è dato da $E_z(y,t) = E_0 e^{i(ky-\omega t)}$ Volts/metro. Quest'onda si propaga nel vuoto; la sua ampiezza è $E_0 = 5\,\mathrm{V/m}$ e la sua lunghezza d'onda è $0.10\,\mathrm{m}$. (i) Qual'è la frequenza dell'onda? (ii) Quant'è grande il campo magnetico associato con quest'onda e in che direzione è orientato? (iii) Qual'è il tasso medio con cui l'energia è trasportata da quest'onda (al metro quadro)?

7. Si consideri il processo in cui un corpo centrale di massa M e raggio R aumenta la sua massa nelle ipotesi in cui: (i) il corpo centrale accresce massa con *rate* costante $\dot{M}$; (ii) *tutta* l'energia generata durante questo processo viene immediatamente emessa (con lo stesso *rate* con cui viene prodotta) sotto forma di radiazione elettromagnetica. Si dimostri che sotto queste ipotesi la luminosità dovuta all'accrescimento si può scrivere come $L_{\mathrm{acc}} = GM\dot{M}/R$.

8. Si mostri che l'energia di un fotone nel sistema di quiete di un elettrone è $h\nu' \ll m_{\mathrm{e}}c^2$ nel caso in cui elettroni con $\gamma = 10^4$ scatterano i fotoni a $2.7\,\mathrm{K}$ della radiazione cosmica di fondo. (γ è il fattore di Lorentz).

9. Si consideri un sistema meccanico Lagrangiano con n gradi di libertà descritto dalla Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, ove $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ sono le coordinate generalizzate e $\dot{q}_i(t)$ le corrispondenti velocità generalizzate. Si discuta *usando esplicitamente le equazioni del moto* se tale sistema è dinamicamente equivalente al sistema di Lagrangiana $\tilde{L} = L + \frac{df}{dt}$, ove f è un'arbitraria funzione di tutte le q_i, $\dot{q}_i$ e t (si assumono tutte le funzioni sufficientemente regolari).

10. Dato un sistema Hamiltoniano con due gradi di libertà e coordinate q_1, p_1 e q_2, p_2, si verifichi se la seguente trasformazione è canonica

$$Q_1 = q_1^2 \qquad P_1 = \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2} \qquad Q_2 = \frac{q_2}{\cos p_2} \qquad P_2 = \sin p_2 - 2q_1.$$

Se lo è si determini quindi una funzione generatrice per la trasformazione.

11. Si risolva il problema dell'oscillatore armonico unidimensionale usando il formalismo delle trasformazioni canoniche.

12. Si consideri la successione di funzioni $f_n(t) := t + \arctan(t^n)$ per $n \geq 1$. Si studi la convergenza puntuale e uniforme di f_n sugli intervalli $[0,2]$ e $[2,+\infty[$. Si affronti poi lo stesso problema per la successione delle derivate f_n' su $[0,1[$. Si discuta, infine, la convergenza di f_n su $[0,2]$ rispetto alla norma $\|g\|_1 := \int_0^2 |g(t)|dt$.

13. Si consideri il solido $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y)^2 + z^2 \leq 1,\ |y| \leq 1\}$. Calcolare la misura di Lebesgue (volume) di E. Si calcoli quindi l'integrale doppio $\iint_D (|x| - y)dx\,dy$, dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'intersezione di E col piano $z = 0$.

14. Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine $x'' - x^{-\alpha} + x = 0$ nel semipiano $x > 0$ del piano delle fasi $(x, y) = (x, x')$, dove $\alpha > 0$ è un parametro. Descrivere al variare di α le curve di livello dell'energia associata all'equazione e trovare per quali punti iniziali $(x(0), x'(0))$ la soluzione $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed è tale che $x(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

15. Discutere esistenza e unicità delle soluzioni del sistema non lineare di equazioni in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x - \cos(xy) = 0, \\ x - 4y + \sin(x + y) = 0. \end{cases}$$

(Si può riscrivere come problema di punto fisso).

16. Per p numero primo, si determini l'ordine del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici invertibili di ordine n a coefficienti in $\mathbb{Z}_p$.

17. Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$ si determinino tutti i divisori dello zero e tutti gli elementi invertibili.

18. Si dimostri che il gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici invertibili su $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto e non connesso dello spazio $M(n \times n, \mathbb{R})$ di tutte le matrici quadrate. Si dimostri, inoltre, che il sottogruppo ortogonale $O(n, \mathbb{R})$ delle matrici ortogonali è compatto in $M(n \times n, \mathbb{R})$.

19. Sia $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ con $n \geq 2$ un'ipersuperficie. Si dimostri che se X contiene un sottospazio proiettivo di dimensione $r \geq n/2$, allora X ha punti singolari.

20. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare compatta connessa orientata, non omeomorfa alla sfera S^2. Dimostrare che su S ci sono punti con curvatura Gaussiana positiva, nulla e negativa.

21. Si dimostri che lo scoppiamento $\widehat{\mathbb{A}}^2$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ nell'origine non è isomorfo a una varietà affine.

22. Si determini il segno della curvatura gaussiana di una superficie rigata $S \subset \mathbb{R}^3$.

23. Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ un'ipersuperficie riducibile. Si dimostri che il luogo singolare $X_{\text{sing}} \subset X$ verifica $\dim X_{\text{sing}} \geq n - 2$. Inoltre, sia $0 < m \leq n$ e si consideri $Q_m = V_P(x_0^2 + \cdots + x_m^2) \subset \mathbb{P}^n$. Si dimostri che Q_m è riducibile se e solo se $m = 1$.

24. Si trovi il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \big(\{(x, 0, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y, 0) \mid y \geq 0\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \geq 0\}\big)$.

25. Si consideri il problema scalare reale ai valori iniziali $y'(t) = \lambda y(t) + c$, $0 \leq t \leq T$, $y(0) = y_0$ con $\lambda < 0$. Determinare la soluzione analitica $y(T)$ e la soluzione numerica y_N ottenuta con il metodo di Eulero esplicito a passo costante $h = T/N$, N intero positivo. Stimare l'errore $y_N - y(T)$, mettendo in evidenza la dipendenza dell'errore da T.

26. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Quali condizioni sui parametri α e β garantiscono l'esistenza della fattorizzazione $A = LU$? Calcolare L ed U. Come si usa la fattorizzazione per il calcolo del determinante di A? Scegliere, infine, due valori per α e β, con $\alpha \neq 0$, che non permettono la fattorizzazione $A = LU$ e calcolare la fattorizzazione $PA = LU$.

27. Determinare un'approssimazione di $\sqrt{2}$ interpolando la funzione 2^x nei punti $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Provare poi che la norma del massimo dell'errore di interpolazione di tale funzione su $n + 1$ punti distinti in $[0, 2]$ tende a zero per $n \to \infty$.

28. Si consideri la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare $Ax \approx b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La soluzione è unica? Perché? Quale dei quattro vettori $(1,1,1,1)^T$, $(0,1,1,-2)^T$, $(0,1,0,1)^T$, $(-2,1,0,1)^T$ potrebbe essere un residuo? Motivare la risposta. Risolvere infine il sistema e calcolare il residuo per $b = (-5,0,10,0)^T$.

29. Siano f una funzione sufficientemente liscia e $h > 0$. Si consideri la formula di quadratura $\tilde{I} = h[Af(0) + Bhf'(bh) + Cf(h)]$, dove $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $b \in [0,1]$ sono indipendenti da f e h, per l'approssimazione dell'integrale $I = \int_0^h f(t)dt$. Come devono essere scelti A, B, C e b in modo che l'intero positivo p in $|\tilde{I} - I| = O(h^p)$, $h \to 0$, sia il più grande possibile?

30. Si consideri il sistema lineare $A^2x = b$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è non singolare e $b \in \mathbb{R}^n$, e la sua perturbazione $(A + \delta A)^2\widetilde{x} = b$, dove $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Data una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ e quindi una norma su $\mathbb{R}^{n\times n}$ dedotta dalla norma su $\mathbb{R}^n$, dare una maggiorazione per l'errore $\|\widetilde{x} - x\|/\|x\|$, che valga per $\|\delta A\|$ sufficientemente piccola.

31. Sia G un grafo non orientato con n vertici ed m lati e si denoti con $\alpha(G)$ il numero di stabilità di G. Si dimostri che $\alpha(G)^2 \leq n^2 - 2m$.