Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXVII Ciclo

Università di Udine

24 novembre 2011

Tema C

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Introduzione all'integrale di Lebesgue.
2. Geodetiche.
3. Domini fattoriali.
4. Teorema di Tichonov del prodotto di spazi compatti.
5. Il metodo dei minimi quadrati.
6. Dualità in programmazione lineare.
7. Principi di minimo in elasticità.
8. L'induzione elettromagnetica.
9. Il candidato discuta, con riferimento ad un sistema fisico specifico, la teoria e un metodo di risoluzione di un problema a molti corpi.
10. La rivelazione della luce Cherenkov ha molte applicazioni nei rivelatori di radiazione a base ottica. Si elenchino queste applicazioni e se ne discuta una in dettaglio.
11. L'osservazione della radiazione elettromagnetica proveniente dal cosmo si avvale di tecniche sperimentali differenti a seconda della banda energetica. Si discuta come varie tecniche si complementano fra loro in relazione a uno specifico problema fisico.

Problemi

Svolgere al più quattro problemi tra i seguenti proposti.

1. Giustificare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'esistenza (su tutto $\mathbb{R}$) e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy
$$u' = \frac{(1-x^2)|u|}{2u^2+1}\,, \qquad u(0) = a\,.$$

Se $a > 0$, dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ e $\int_0^{+\infty} u(x)\,dx < +\infty$, con analoghe conclusioni a $-\infty$ se $a < 0$, e valutare l'ordine di infinitesimo di u. Studiare infine la convergenza puntuale e uniforme su $[0, +\infty[$ della successione delle soluzioni u_n con dati iniziali $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, e calcolare, se esiste, il limite $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x)\,dx$.

2. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio dei polinomi reali. Mostrare che $\|p\| := |a_0|+\cdots+|a_n|$ (ove $p(x) = a_0+\cdots+a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{R}$) definisce una norma su $\mathbb{R}[x]$. $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$ non è completo. Discutere il completamento di $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$.

3. Sia S la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$. Scrivere una parametrizzazione $\alpha(t)$ di un arco di cerchio massimo di S avente per estremi i punti $A(1, 0, 0)$ e $B(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Dimostrare che per ogni valore t_0 del parametro il vettore $\alpha''(t_0)$ risulta ortogonale al piano tangente alla sfera in $\alpha(t_0)$.

4. Sia X un'ipersuperficie *generale* di grado d di $\mathbb{P}^n_K$. Dimostrare che, se $d > 2n - 3$, X non contiene rette.

5. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ uno dei sottoinsiemi (a) l'intervallo $(0, 1)$; (b) l'intervallo $[0, 1)$; (c) $\mathbb{Q}$ (i numeri razionali); (d) I (i numeri irrazionali). Determinare in quale dei casi esiste una metrica d su X che induce su X la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e rende (X, d) uno spazio metrico completo.

6. Determinare gli elementi invertibili dell'anello (a) $\mathbb{Z}[i]$ (l'anello dei numeri di Gauss); (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Considera il metodo di Newton per la risoluzione dell'equazione $\sin x = x/5$ nell'intervallo $[\pi/2, \pi]$. Descrivere l'algoritmo, proporre un valore iniziale che ne garantisca la convergenza e analizzare l'ordine di convergenza del metodo.

8. Studiare il condizionamento del problema del calcolo della funzione $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$ e stabilire per quali coppie (x, y) il problema è malcondizionato.

9. Modellare come problema di flusso ammissibile il seguente problema: dati una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ad elementi in $\{0, 1\}$ ed un intero k, $0 < k < n$, determinare se esiste un sottoinsieme S di elementi non nulli di A tale che ogni colonna di A contengono esattamente k elementi di S.

10. Un grave cade lungo una linea posta in un piano verticale. Trovare la forma della curva perché, in assenza di attrito, il tempo impiegato dal grave a cadere lungo un arco qualsiasi eguagli quello impiegato a cadere lungo la corda.

11. Dimostrare che se, in un hamiltoniano H, ℓ e s sono buoni numeri quantici (cioè se gli operatori $\vec{L}$ e $\vec{S}$ commutano con l'hamiltoniano), tali restano per l'hamiltoniano $H' = H+\alpha\vec{L}\cdot\vec{S}$ (con α costante; $\vec{L}, \vec{S}$ rispettivamente momento angolare orbitale e spin; ℓ e s numeri quantici corrispondenti ai due operatori).

12. In due distinti recipienti sono contenuti due gas ideali identici (stesse particelle di massa m e stesso numero di particelle N) alla stessa temperatura T, ma alle diverse pressioni p_1 e p_2, rispettivamente. I due recipienti vengono uniti e i gas si miscelano senza perdita di energia. Per mezzo di considerazioni termodinamiche e statistiche, determinare la variazione di entropia del sistema.

13. Supponiamo d'interpretare l'elettrone cone una sfera classica di raggio r e massa m, che ruota con momento angolare $\hbar/2$ ($\hbar \simeq 1.05 \times 10^{-34}$ J s). Qual è la velocità di un punto all'equatore? Sperimentalmente è noto che $r < 10^{-18}$ m. Qual è la corrispondente velocità equatoriale? Che cosa potete concludere da ciò?

14. Valutare la velocità del centro di massa di due fotoni di energia E e ϵ rispettivamente, che si scontrano lungo la stessa direzione e con verso opposto. Qual è la massa invariante del sistema?

15. I muoni cosmici sono prodotti nell'atmosfera a un'altezza tipica di 8000 m e viaggiano verso la Terra a una velocità di picco di $0.998c$. Se la loro vita media è di 2.2×10^{-6} s, quanto lontano arriverebbero in base alla fisica classica? Ora risolvere lo stesso problema utilizzando la relatività speciale. Qual è la soluzione del problema del sistema di riferimento del muone? Come fa il muone ad arrivare al suolo?

16. Il mesone ρ^0 ($m = 769$ MeV, $\Gamma = 154$ MeV) può venire prodotto in collisioni $\pi^- p \to \rho^0 n$ ($m_p = 938$ MeV, $m_n = 940$ MeV, $m_{\pi-} = 140$ MeV. (a) Qual è la vita media e la distanza media di decadimento nel laboratorio di un ρ^0 di 5 GeV di energia? (b) Qual è la soglia di energia per la produzione del ρ^0? (c) Se la sezione di produzione è di 1 mb $= 10^{-27}$ cm^2, e la targhetta d'idrogeno ha una lunghezza di 30 cm (e densità di 0.078 g/cm^3), quanti ρ^0 vengono prodotti da ogni pione in media?

17. Consideriamo un disco carico e un sensore di campo magnetico nelle 3 situazioni rappresentate in Figura 1: (a) il sensore è fermo mentre il disco ruota intorno il suo asse; (b) il disco è fermo ed il sensore ruota intorno al disco; (c) sia il sensore che il disco ruotano con la stessa velocità angolare. Spiegare in quali di queste situazioni il sensore di campo magnetico rileva la presenza di un campo magnetico. Giustificare la risposta.

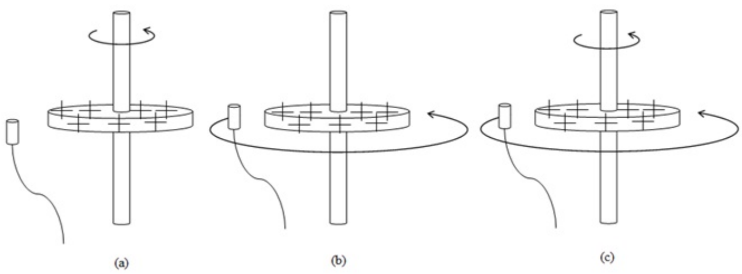

Figura 1: Disco carico

18. Un filo conduttore a forma di U ruota strisciando con i suoi estremi su di un piano conduttore come mostrato in Figura 2. Nella regione considerata c'è un campo magnetico costante. Si genera una forza elettromotrice indotta all'interno del filo conduttore? Giustificare la risposta.

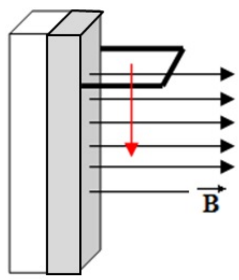

Figura 2: Filo conduttore