Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXVII Ciclo

Università di Udine

24 novembre 2011

Tema B

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Il teorema di Hahn-Banach ed applicazioni.
2. Gruppi di matrici.
3. Il teorema di Sylow.
4. Teorema di Tichonov del prodotto di spazi compatti.
5. Formule di quadratura per integrali definiti.
6. Il problema di peso minimo: si descrivano un algoritmo risolutivo ed alcune applicazioni.
7. Teoremi di conservazione in meccanica Lagrangiana.
8. L'induzione elettromagnetica.
9. Il metodo Monte Carlo nella simulazione fisica dei sistemi di molte particelle: caratteristiche, potenzialità ed esempi.
10. Con la progressiva crescita dell'energia degli acceleratori, l'importanza della calorimetria, tra le diverse tecniche di rilevazione, si afferma sempre di più. Se ne spieghino le ragioni e si descriva l'evoluzione delle tecniche calorimetriche con particolare attenzione a quella della calorimetria adronica.
11. Il candidato illustri il meccanismo di generazione di un tipo di particelle di alta energia da parte di una sorgente astrofisica.

Problemi

Svolgere al più quattro problemi tra i seguenti proposti.

1. Siano $a > 0$ e $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e assolutamente integrabile. Dimostrare che ogni soluzione $u \in C^2[0, +\infty[$ dell'equazione differenziale $u'' + au = f(x)$ è limitata.
2. Sia c_0 lo spazio delle successioni reali che convergono verso 0. Determinare un isomorfismo lineare tra lo spazio duale (continuo) di $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ed ℓ_1.

3. Sia X l'ipersuperficie affine di equazione $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Si supponga che il polinomio F sia somma di due polinomi omogenei non nulli F_{d-1} e F_d, privi di fattori comuni e di gradi rispettivamente $d-1$ e d. Provare che X è irriducibile e razionale.

4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $q\colon V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica g. Si provi che q è indefinita se e solo se $q(V) = \mathbb{R}$.

5. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ uno dei sottoinsiemi (a) l'intervallo $(0, 1)$; (b) l'intervallo $[0, 1)$; (c) $\mathbb{Q}$ (i numeri razionali); (d) I (i numeri irrazionali). Determinare in quale dei casi esiste una metrica d su X che induce su X la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e rende (X, d) uno spazio metrico completo.

6. Determinare gli elementi invertibili dell'anello (a) $\mathbb{Z}[i]$ (l'anello dei numeri di Gauss); (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Siano ℓ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, i coefficienti di Lagrange relativi a dei nodi distinti x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dimostra che per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vale
$$\sum_{j=0}^{n} \ell_j'(x) x_j^k = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

8. Considera il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare e $b \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Detta $\tilde{x}$ un'approssimazione della soluzione x, sia $e = \tilde{x} - x$ l'errore compiuto ed $r = A\tilde{x} - b$ il corrispondente residuo. Dimostrare che
$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|},$$
dove $\|\cdot\|$ è una norma arbitraria in $\mathbb{R}^n$ e $\kappa(A)$ il relativo indice di condizionamento di A.

9. Modellare come problema di flusso ammissibile il seguente problema: dati una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ad elementi in $\{0, 1\}$ ed un intero k, $0 < k < n$, determinare se esiste un sottoinsieme S di elementi non nulli di A tale che ogni colonna di A contengono esattamente k elementi di S.

10. Tre punti, vincolati ad una circonferenza liscia, sono congiunti da tre molle di rigidezza k_1, k_2 e k_3, rispettivamente. Determinare la posizione di equilibrio.

11. Dimostrare che se, in un hamiltoniano H, ℓ e s sono buoni numeri quantici (cioè se gli operatori $\vec{L}$ e $\vec{S}$ commutano con l'hamiltoniano), tali restano per l'hamiltoniano $H' = H + \alpha\vec{L}\cdot\vec{S}$ (con α costante; $\vec{L}, \vec{S}$ rispettivamente momento angolare orbitale e spin; ℓ e s numeri quantici corrispondenti ai due operatori).

12. In due distinti recipienti sono contenuti due gas ideali identici (stesse particelle di massa m e stesso numero di particelle N) alla stessa temperatura T, ma alle diverse pressioni p_1 e p_2, rispettivamente. I due recipienti vengono uniti e i gas si miscelano senza perdita di energia. Per mezzo di considerazioni termodinamiche e statistiche, determinare la variazione di entropia del sistema.

13. Supponiamo d'interpretare l'elettrone cone una sfera classica di raggio r e massa m, che ruota con momento angolare $\hbar/2$ ($\hbar \simeq 1.05 \times 10^{-34}$ J s). Qual è la velocità di un punto all'equatore? Sperimentalmente è noto che $r < 10^{-18}$ m. Qual è la corrispondente velocità equatoriale? Che cosa potete concludere da ciò?

14. Valutare la velocità del centro di massa di due fotoni di energia E e ϵ rispettivamente, che si scontrano lungo la stessa direzione e con verso opposto. Qual è la massa invariante del sistema?

15. I muoni cosmici sono prodotti nell'atmosfera a un'altezza tipica di 8000 m e viaggiano verso la Terra a una velocità di picco di $0.998c$. Se la loro vita media è di 2.2×10^{-6} s, quanto lontano arriverebbero in base alla fisica classica? Ora risolvere lo stesso problema utilizzando la relatività speciale. Qual è la soluzione del problema del sistema di riferimento del muone? Come fa il muone ad arrivare al suolo?

16. (a) Si scriva un'espressione per l'angolo di emissione θ della radiazione Cherenkov, in funzione della velocità $v = \beta c$ della particella e dell'indice di rifrazione n del mezzo. (b) Qual è la soglia energetica di un elettrone in un gas per l'emissione di luce Cherenkov se l'indice di rifrazione del gas in condizioni standard è di 1.000135?

17. Si consideri il circuito illustrato in Figura 1, formato da una sbarretta rigida di lunghezza l, resistenza R e massa m, a contatto con i due rami di un conduttore a forma di U di resistenza trascurabile, sul cui lato più corto sono inseriti un interruttore T e un generatore di tensione continua di resistenza interna trascurabile e assegnata f.e.m. V. La sbarretta più scorrere con attrito trascurabile, mantenersi sempre perpendicolare e a contatto con ciascuno due rami del conduttore a U.

    L'intero circuito è immerso in un campo magnetico costante di intensità B e perpendicolare al piano del circuito come illustrato in figura. Se si chiude il circuito, azionando l'interruttore T, in esso circola corrente. Nell'ipotesi in cui siano trascurabili gli effetti di autoinduzione si determinino a regime: (a) la velocità con cui si muove la sbarretta; (b) l'intensità della corrente che circola nel circuito; (c) la potenza dissipata dal generatore

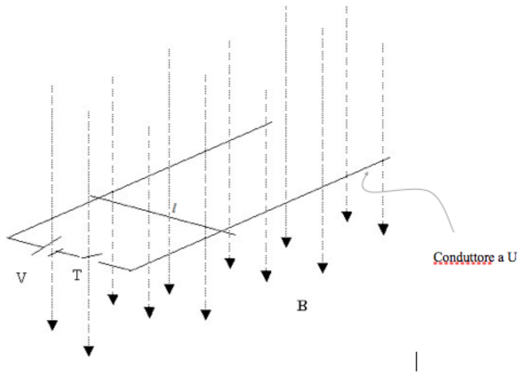

Figura 1: Circuito

18. Un filo conduttore è collegato ai centri di due semicerchi conduttori. Sapendo che il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme, il processo rappresentato in Figura 2 induce una corrente elettrica all'interno del circuito? Giustificare la risposta.

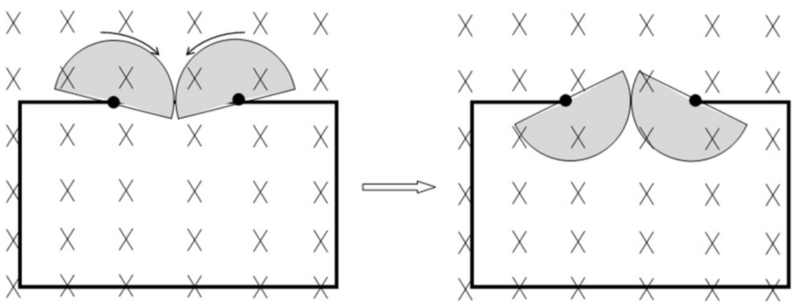

Figura 2: Filo conduttore