Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXVII Ciclo

Università di Udine

24 novembre 2011

Tema A

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Trattare in modo sintetico il tema delle serie di Fourier in spazi di Hilbert, dando risalto ad alcuni aspetti che si ritengono di rilievo.
2. Dualità negli spazi vettoriali e negli spazi proiettivi.
3. Gruppi di permutazioni.
4. Teorema di Tichonov del prodotto di spazi compatti.
5. Metodi iterativi standard per la risoluzione di sistemi lineari.
6. Algoritmi esatti ed euristici per il problema del commesso viaggiatore.
7. L'equazione delle onde e la soluzione di D'Alembert.
8. Il campo magnetico e la sua natura.
9. Il candidato discuta, con riferimento ad un sistema fisico specifico, la teoria e un metodo di risoluzione di un problema a molti corpi.
10. L'applicazione dei rivelatori a scintillazione si è largamente estesa nel corso del tempo alla medicina e molti altri campi. Scintillatori generano solamente qualche centinaio di fotoni per MeV di energia depositata da radiazioni ionizzanti. Quindi un rivelatore a scintillazione deve incorporare fotorivelatori ad alto guadagno. Si descrivano le caratteristiche generali di questi fotorivelatori con particolare attenzione alla loro evoluzione in tempi recenti e alle conseguenze pratiche di tale evoluzione.
11. Il candidato illustri il meccanismo di generazione di un tipo di particelle di alta energia da parte di una sorgente astrofisica.

Problemi

Svolgere al più quattro problemi tra i seguenti proposti.

1. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[0,1]$, derivabile su $]0,1[$, con $f(0) = 0$ e tale che $|f'(x)| \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$. Dimostrare che allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$.
2. Sia K un sottoinsieme di ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$. Mostrare che K è relativamente compatto se e solo se K è limitato (rispetto a $\|\cdot\|_p$) e $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\geq n} |x_i|^p = 0$ uniformemente in $x \in K$ (ove $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

3. In $\mathbb{R}^3$ sono date tre sfere S_1, S_2, S_3 e un punto P tale che $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$. Si suppone che le tre sfere non abbiano alcuna retta tangente comune in P. Provare che esiste $Q \neq P$ tale che $Q \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

4. Sia X un'ipersuperficie irriducibile di grado d con un punto di molteplicità $d-1$. Provare che X è razionale.

5. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ uno dei sottoinsiemi (a) l'intervallo $(0,1)$; (b) l'intervallo $[0,1)$; (c) $\mathbb{Q}$ (i numeri razionali); (d) I (i numeri irrazionali). Determinare in quale dei casi esiste una metrica d su X che induce su X la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e rende (X,d) uno spazio metrico completo.

6. Determinare gli elementi invertibili dell'anello (a) $\mathbb{Z}[i]$ (l'anello dei numeri di Gauss); (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

7. Considera il problema ai limiti

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = g(x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

con $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Discretizzare il problema con la tecnica delle differenze finite centrali del secondo ordine su una mesh uniforme e scrivere il risultante sistema lineare. Provare inoltre la non-singolarità della matrice di tale sistema.

8. Considera la formula dei trapezi composta applicata all'integrale $\int_{-b}^{b} f(x)dx$, dove $b > 0$ ed f è una funzione dispari. Dimostra che la formula di quadratura fornisce il valore esatto dell'integrale.

9. Modellare come problema di flusso ammissibile il seguente problema: dati una matrice quadrata A di dimensioni $n \times n$ ad elementi in $\{0,1\}$ ed un intero k, $0 < k < n$, determinare se esiste un sottoinsieme S di elementi non nulli di A tale che ogni colonna di A contenga esattamente k elementi di S.

10. Due anellini, d'egual peso p, sono collegati da un filo di lunghezza l e vicolati a due guide liscie, poste in un piano verticale inclinate di un angolo α rispetto alla verticale. Nel punto di mezzo il filo supporta un carico $2p$. Determinare la posizione di equilibrio del sistema e la tensione del filo.

11. Dimostrare che se, in un hamiltoniano H, ℓ e s sono buoni numeri quantici (cioè se gli operatori $\vec{L}$ e $\vec{S}$ commutano con l'hamiltoniano), tali restano per l'hamiltoniano $H' = H + \alpha\vec{L}\cdot\vec{S}$ (con α costante; $\vec{L}, \vec{S}$ rispettivamente momento angolare orbitale e spin; ℓ e s numeri quantici corrispondenti ai due operatori).

12. In due distinti recipienti sono contenuti due gas ideali identici (stesse particelle di massa m e stesso numero di particelle N) alla stessa temperatura T, ma alle diverse pressioni p_1 e p_2, rispettivamente. I due recipienti vengono uniti e i gas si miscelano senza perdita di energia. Per mezzo di considerazioni termodinamiche e statistiche, determinare la variazione di entropia del sistema.

13. Supponiamo d'interpretare l'elettrone come una sfera classica di raggio r e massa m, che ruota con momento angolare $\hbar/2$ ($\hbar \simeq 1.05 \times 10^{-34}$ J s). Qual è la velocità di un punto all'equatore? Sperimentalmente è noto che $r < 10^{-18}$ m. Qual è la corrispondente velocità equatoriale? Che cosa potete concludere da ciò?

14. Valutare la velocità del centro di massa di due fotoni di energia E e ϵ rispettivamente, che si scontrano lungo la stessa direzione e con verso opposto. Qual è la massa invariante del sistema?

15. I muoni cosmici sono prodotti nell'atmosfera a un'altezza tipica di 8000 m e viaggiano verso la Terra a una velocità di picco di 0.998 c. Se la loro vita media è di 2.2×10^{-6} s, quanto lontano arriverebbero in base alla fisica classica? Ora risolvere lo stesso problema utilizzando la relatività speciale. Qual è la soluzione del problema del sistema di riferimento del muone? Come fa il muone ad arrivare al suolo?

16. (a) Si discutano i relativi meriti di un collisionatore e di un acceleratore a targhetta fissa per quanto riguarda (i) l'energia di soglia per la produzione di particelle; (ii) i tassi di produzione; (iii) la distribuzione angolare e le sue implicazioni per quanto riguarda la progettazione dei rivelatori. (b) Qual è l'energia di soglia per la produzione di una particella Z^0 (m$c^2 = 91.2$ GeV) in ognuno dei due casi (per collisioni pp).

17. Consideriamo un disco carico e un sensore di campo magnetico nelle 3 situazioni rappresentate in Figura 1: (a) il sensore è fermo mentre il disco ruota intorno il suo asse; (b) il disco è fermo ed il sensore ruota intorno al disco; (c) sia il sensore che il disco ruotano con la stessa velocità angolare. Spiegare in quali di queste situazioni il sensore di campo magnetico rileva la presenza di un campo magnetico. Giustificare la risposta.

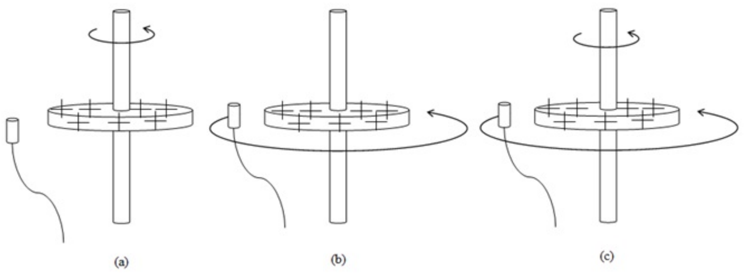

Figura 1: Disco carico

18. Si consideri il circuito illustrato in Figura 2, formato da una sbarretta rigida di lunghezza l, resistenza R e massa m, a contatto con i due rami di un conduttore a forma di U di resistenza trascurabile, sul cui lato più corto sono inseriti un interruttore T e un generatore di tensione continua di resistenza interna trascurabile e assegnata f.e.m. V. La sbarretta più scorrere con attrito trascurabile, mantenersi sempre perpendicolare e a contatto con ciascuno due rami del conduttore a U.

    L'intero circuito è immerso in un campo magnetico costante di intensità B e perpendicolare al piano del circuito come illustrato in figura. Se si chiude il circuito, azionando l'interruttore T, in esso circola corrente. Nell'ipotesi in cui siano trascurabili gli effetti di autoinduzione si determinino a regime: (a) la velocità con cui si muove la sbarretta; (b) l'intensità della corrente che circola nel circuito; (c) la potenza dissipata dal generatore

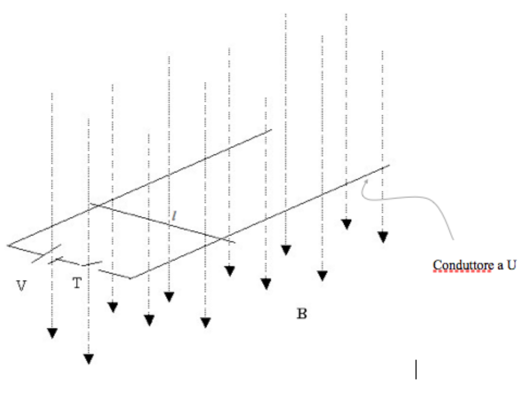

Figura 2: Circuito