Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica, XXVI Ciclo

Università di Udine

23 Novembre 2010 **Tema C**

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Descrivere i principi di funzionamento e lo stato dell'arte di uno tra i rivelatori che compongono un apparato sperimentale della fisica delle alte energie con fasci collidenti.
2. Scelta una classe di sorgenti cosmiche di raggi gamma di altissima energia, il candidato ne discuta lo spettro di radiazione e i meccanismi d'emissione relativi.
3. Illustrare alcuni strumenti di classificazione di campioni statistici di eventi utilizzabili in fisica.
4. Il modello dell'oscillatore armonico è stato spesso utilizzato per la descrizione di molti fenomeni fisici. Se ne discuta estensivamente un esempio in ambito classico o quantistico analizzando le previsioni e le verifiche sperimentali.
5. Onde e oscillazioni nella didattica della fisica.
6. Si discuta il teorema di Noether per sistemi meccanici con un numero finito di gradi di libertà, mostrando come varie leggi di conservazione si possono reinterpretare alla luce di questo teorema.
7. Le equazioni costitutive nella Fisica Matematica.
8. L'equazione delle onde e la soluzione di D'Alembert.
9. Il principio della minima energia e della minima energia complementare in elasticità lineare. Applicazioni.
10. I teoremi di punto fisso di Brouwer e di Schauder e alcune loro applicazioni.
11. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la ricerca degli estremi vincolati: alcuni esempi ed applicazioni.
12. Presentare e discutere uno o più sistemi di deduzione (per esempio sistemi alla Hilbert, deduzione naturale, risoluzione, tableaux semantici,. . .).
13. Forme dell'assioma di scelta.
14. Campi finiti.
15. Presentare le nozioni di base di teoria delle categorie.
16. Superfici di Riemann compatte.
17. Il teorema degli zeri di Hilbert.
18. Metodi Runge-Kutta per equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine.
19. Martingale a tempo discreto.
20. Si descriva un metodo risolutivo per la programmazione lineare intera.

Problemi

Svolgere al massimo quattro problemi.

1. Calcolare l'evoluzione temporale dell'energia $E = \gamma mc^2$ di un elettrone che, moventesi in un campo magnetico isotropo di densità d'energia U, emette radiazione di sincrotrone al tasso $d\gamma/dt = -3 \cdot 10^{-8}\gamma^2 U$. Per quale intensità del campo magnetico l'energia si riduce a $E = 100MeV$ in $10^6 s$?

2. Una piattaforma di massa $M = 100$ kg scivola, con attrito trascurabile, su un piano orizzontale viaggiando ad una velocità costante $v_0 = 5.0$ m/s. Ad un certo istante sulla piattaforma, in prossimità del suo bordo anteriore, viene poggiato un corpo puntiforme di massa $m = 10$ kg avente velocità nulla rispetto al suolo. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piattaforma sia pari a $\mu_k = 0.50$, si determini la lunghezza minima che la piattaforma dovrebbe avere affinché il corpo non cada da essa.

3. Un osservatore S vede due lampi di luce emessi da due punti sulla stessa linea a distanza di 5.00 μsl'uno dall'faltro: il primo è un lampo di luce rossa emesso a 500 m dall'osservatore S; il secondo è un lampo di luce verde emesso da 300 m. Si determini: (a) la velocità v di un secondo osservatore S' (rispetto ad S) che vede questi due lampi emessi dallo stesso punto e l'intervallo di tempo tra essi specificando quale dei due lampi vede per primo; b) la massima distanza tra i punti di emissione dei lampi entro cui sarebbe possibile trovare un osservatore (come S') per il quale i due lampi sono emessi dallo stesso punto; (c) il massimo intervallo di tempo tra i lampi entro cui sarebbe possibile trovare un osservatore per il quale i due lampi sono simultanei.

4. Determinare la variazione percentuale in pressione subita da un gas considerabile come monoatomico perfetto, alla fine di una trasformazione adiabatica reversibile che riduca il suo volume a due terzi di quello iniziale.

5. Una sorgente di luce si trova alla profondità di 80.0 centimetri in acqua (indice di rifrazione 1.33). Trovare il diametro del più ampio cerchio in superficie, attraverso il quale la luce emerge dall'acqua.

6. Una antenna a spira di area A e resistenza R è perpendicolare ad un campo magnetico uniforme. Il campo decrescente linearmente da un valore iniziale B a zero in t secondi. Determinare un'espressione per l'energia termica totale dissipata nella spira.

7. Si risolva il problema dell'oscillatore armonico unidimensionale usando il formalismo delle trasformazioni canoniche.

8. Si consideri un sistema composto da una particella di massa m, vincolata a muoversi lungo una circonferenza liscia con raggio $R(t)$, variabile nel tempo (si assuma nota la dipendenza di R da t) in assenza di forze attive. Si imposti il problema del moto nell'ambito della meccanica Lagrangiana e si usi il teorema di Noether (dopo averlo enunciato) per determinare almeno una quantità conservata.

9. Si determini per quali valori di α e β le equazioni

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p) \quad P = q^\alpha \sin(\beta p)$$

definiscono una trasformazione canonica. Si determini, sotto queste condizioni, una funzione generatrice del terzo tipo per la trasformazione.

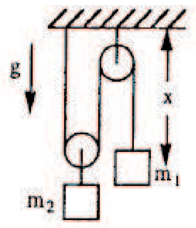
10. Un punto materiale di massa m si muove lungo la retta x in un pozzo di potenziale $V = V_0 \tan^2(\frac{n}{2}\frac{x}{a})$. Per una data energia totale E, trovare la posizione del punto come una funzione del tempo e il periodo del moto. Esaminare e interpretare i casi estremi di bassa energia $E << V_0$ e di alta energia $E >> V_0$.

11. Nel sistema in figura si usi il principio di d'Alembert per trovare l'accelerazione di m_1.

12. Un'asta pesante di lunghezza L ha un estremo che può scorrere senza attrito lungo una guida verticale ed è vincolata a mantenersi in contatto con una circonferenza di raggio R appartenente ad un piano orizzontale. L'asta ruota in un piano verticale con velocità angolare ω intorno alla guida. Si determinino

    a) le coordinate Lagrangiane e la Lagrangiana del sistema;

    b) l'equazione di Lagrange del moto.



13. Dimostrare che il luogo di zeri della funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$F(x, y) = e^{x-y} - x^2 \arctan(y|y|)$$
è non vuoto e definisce implicitamente un'unica funzione $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$. Determinare il dominio D di f, studiarne le proprietà qualitative e, dove possibile, quantitative, il grado di regolarità e fornirne eventuali stime sul comportamento asintotico al finito e all'infinito. Infine tracciarne il grafico.

14. Determinare il comportamento della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} \int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$
rispetto a varie nozioni di convergenza standard (puntuale, uniforme, L^p ecc.) che il candidato conosce.

15. Costruire un esempio di funzione $f \in L^1[0, 1]$ tale che $f \notin L^p[0, 1]$ per ogni $p > 1$.

16. Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$, esiste almeno una funzione continua che soddisfa all'equazione
$$x(t) = t^2 + \lambda \int_0^t \cos^2(x(s))\, ds, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$
Dire se per qualche $\lambda > 0$ tale soluzione è unica.

17. Calcolare il volume dell'insieme $E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + y^2 + |z| \leq 1\}$.

18. Sia $C = 2^\omega$ lo spazio di Cantor (ovvero lo spazio prodotto ottenuto dando a $2 = \{0, 1\}$ la topologia discreta). Un clopen è un sottoinsieme di C che è sia chiuso che aperto. Dimostrare che C è compatto, privo di punti isolati (cioè nessun singoletto è un clopen), totalmente sconnesso (cioè se p e q sono due punti distinti allora esiste un clopen A con $p \in A$ e $q \notin A$).

19. Sia $\mathcal{K}$ la classe dei campi, nel linguaggio $\{+, -, 0, \cdot, 1, =\}$. Dimostrare che $\mathcal{K}$ non è assiomatizzabile al primo ordine tramite formule universali.

20. Sia L un linguaggio finito nella logica al primo ordine con uguaglianza, e sia T una teoria in L avente un numero finito di assiomi. Sia γ_n un enunciato che asserisce che esistono esattamente n individui. Dimostrare che l'insieme dei teoremi di T della forma $\gamma_n \to \alpha$ ($n \geq 1$, α enunciato di L) è decidibile.

21. Dare un esempio di teoria al primo ordine che sia $\aleph_0$-categorica, ma non κ-categorica per alcun $\kappa > \aleph_0$.

22. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbf{Q}$ di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

23. Calcolare il numero di polinomi irriducibili di grado 4 in $\mathbb{F}_5[x]$.

24. Dimostrare che ogni algebra di Boole finita ha cardinalità 2^n per qualche n.

25. Sia $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots, n) \in S_n$. Dimostrare che la classe di coniugio di σ contiene $(n-1)!$ elementi. Dimostrare che $\mu \in S_n$ commuta con σ sse μ è una potenza di σ.

26. Sia $D \geq 2$ un intero, e sia $\mathbb{Z}[i\sqrt{D}] = \{a + bi\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che gli unici elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i\sqrt{D}]$ sono 1 e -1. Dimostrare che 3, $2 + i\sqrt{5}$, $3 - 2i\sqrt{5}$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}[i\sqrt{D}]$.

27. Sia $C = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} | x^4 + y^4 + z^2(x^2+y^2) = 0\}$

- Dire se C è una curva algebrica singolare oppure no e in caso affermativo determinarne le singolarità.
- Determinare almeno un automorfismo j diverso dall'identità di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $j(C) = C$.
- Determinare il genere geometrico di C.
- Determinare il genere geometrico dello spazio delle orbite $C/\langle j \rangle$.

28. Sia $\pi \colon X \to Y$ un rivestimento e sia $G = \mathrm{Aut}(X/Y)$ il gruppo delle trasformazioni continue del rivestimento, ossia $\phi \in G$ se $\phi : X \to X$ è continua e $\pi = \pi \circ \phi$. Detto $Z = X/G$ lo spazio delle G-orbite, dimostrare che la proiezione natutale $\rho \colon X \to Z$ è un rivestimento e che l'applicazione naturale $\mu \colon Z \to Y$, $\mu([x]) = \pi(x)$ è un rivestimento, dove $[x]$ è la G-orbita di x. Detto x_0 un punto di X, posto $y_0 = \pi(x_0)$, e detti $H = \pi_\star \Pi_1(X, x_0)$ $K = \mu_\star \Pi_1(Z, [x_0])$ i sottogruppi indotti in $\Pi_1(Y, y_0)$ dalle rispettive applicazioni di rivestimento, π e μ, dimostrare che K è il normalizzante di H in $\Pi_1(Y, y_0)$ (Π_1 denota il gruppo fondamentale).

29. Sia A_n la matrice $n \times n$ che ha a come elemento nella sottodiagonale, c come elemento sulla diagonale e b come elemento nella sopradiagonale; per esempio

$$A_3 = \begin{pmatrix} c & b & b \\ a & c & b \\ a & a & c \end{pmatrix}.$$

Una volta calcolato $\det A_n$ per $n = 1$ e per $n = 2$, si dimostri che se $n \geq 3$ allora $\det A_n = (2c - a - b)\det A_{n-1} - (a - c)(b - c)\det A_{n-2}$. Determinare il polinomio caratteristico di A_n in termine dei polinomi caratteristici di A_{n-1} e di A_{n-2}.

30. Stabilire per quali valori del parametro reale α il punto $\bar{x} = (0, 3, -2, -6)$ è soluzione ottima del problema di programmazione lineare $\min\{2x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 : -x_1 + x_2 + x_4 = -3, x_1 - x_2 + x_3 \geq -5, x_1 + x_2 - x_4 \geq 4, x_2 \leq 3, x_1, x_2 \geq 0\}$.

31. Stima il numero minimo N di sottointervalli in cui suddividere l'intervallo $[0, 2]$ affinché l'integrale

$$\int_0^2 [2x - \sin(x)] dx$$

sia approssimato con un resto in modulo minore di $2/3 \times 10^{-4}$ usando

(a) la formula dei trapezi;

(b) la formula di Cavalieri-Simpson.

32. Sia X una variabile casuale discreta a valori nell'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$, tale che $P(X = n) = (4/n)P(X = n - 1)$, per ogni $n \geq 1$. Si determini la distribuzione di probabilità di X ed inoltre $E(X)$ e $Var(X)$.

33. Siano X e Y due variabili casuali identicamente distribuite con legge Bernoulliana di parametro $p \in (0, 1)$. Si dimostri che X e Y sono indipendenti se e solo se la loro covarianza è nulla.

34. Sia X una variabile casuale continua con funzione di ripartizione $F(\cdot)$ strettamente crescente. Si dimostri che la variabile casuale trasformata $Y = F(X)$ ha legge uniforme con supporto $[0, 1]$.