Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXIV Ciclo

Università di Udine

3 novembre 2008

Tema A

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Il concetto di energia e la sua conservazione.
2. Azione a contatto e azione a distanza nell'elettromagnetismo.
3. Si discuta il funzionamento di un rivelatore di particelle, evidenziando i principi fisici su cui si basa la rivelazione.
4. Energia libera e natura delle transizioni di fase.
5. Proprietà di trasporto nei semiconduttori e applicazione a elementi di circuito.
6. Teoremi di conservazione nella meccanica Lagrangiana.
7. Fluidi e solidi: analogie e differenze.
8. Formulazione variazionale del problema agli autovalori per operatori autoaggiunti e compatti in spazi di Hilbert.
9. Il teorema di proiezione di minima distanza su un sottinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert e alcune sue applicazioni.
10. L'uniforme continuità e alcune sue applicazioni in Analisi Matematica.
11. L'assioma della scelta.

Problemi

Svolgere quanti più problemi si riesce.

1. Si consideri la funzione d'onda per lo stato fondamentale della buca di potenziale infinita 1-dimensionale compresa fra $x = 0$ e $x = a$ ($a > 0$). Calcolare i valori medi di x, p e p^2 per una particella di massa m.

2. Una antenna parabolica avente un diametro di 20 m riceve (a incidenza normale) un segnale radio da una sorgente distante. Il segnale radio è un'onda continua sinusoidale con ampiezza $E_{\max} = 0.200\ \mu\text{V/m}$. L'antenna assorbe tutte le radiazioni. Trovare (A) la massima ampiezza del campo magnetico in questa onda, (B) l'intensità della radiazione ricevuta dall'antenna, (C) la potenza ricevuta dall'antenna. ($\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ unità S.I.).

3. Un punto materiale di massa 900 kg che viaggia a velocità $0.850c$ collide con un punto materiale di massa 1400 kg; i due oggetti si fondono. Trovare (a) la velocità e (b) la massa dell'oggetto composti (non c'è dissipazione).

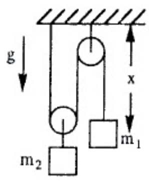
4. Un punto materiale si muove all'interno di una superficie sferica, priva di attrito. Nel punto più alto della sua traiettoria si trova alla quota del centro della superficie sferica, con una velocità $V_0 = 1.00$ m/s, mentre nel punto più basso della traiettoria il punto materiale possiede la velocità $V_1 = 2.00$ m/s. Determinare il raggio della superficie sferica.

5. Due bolle di sapone di identico raggio di equilibrio R_1 e tensione superficiale σ si toccano e si fondono in una unica bolla di raggio di equilibrio R_2 senza che avvenga un travaso di gas fra l'interno delle bolle e l'esterno. Assumendo che la temperatura T_o e la pressione all'esterno delle bolle P_o siano costanti e che il gas nelle bolle si comporti come ideale, si trovi un'equazione che fornisca R_2 in funzione di R_1, σ e P_o.

6. Calcolare l'espressione per la distanza di equilibrio di un cristallo ionico unidimensionale costituito da atomi di carica alternata $\pm q$ e un'energia potenziale di interazione $V(r) = A/r^8 \pm q^2/r$, dove il primo termine agisce solo tra atomi primi vicini ed il segno del secondo termine è legato al carattere attrattivo o repulsivo dell'interazione coulombiana tra coppie di cariche.

7. (a) Mostrare che la lunghezza d'onda di de Broglie per una particella di massa m che si muove ad una velocità pari a quella più probabile per una distribuzione maxwelliana (analoga a quella di un gas ideale) a temperatura T è $\lambda = h/\sqrt{2mk_BT}$ (dove $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K sono le costanti di Planck e Boltzmann, rispettivamente). (b) Calcolare la lunghezza d'onda di de Broglie di un neutrone ($m_n = 1.6747 \cdot 10^{-27}$ kg) che si muove alla velocità più probabile di una maxwelliana a $T = 20°$ C e il suo rapporto con una tipica distanza interatomica in un solido.

8. Una massa m è vincolata a scorrere senza attrito lungo un profilo semicircolare di raggio R i cui estremi appartengono ad una retta verticale e che è posto in rotazione intorno a tale retta con velocità angolare ω. Qual è l'estremo inferiore dei valori di R che garantiscono la stabilità della posizione di equilibrio che non si trova sull'asse di rotazione?

9. Nel sistema in figura 

si usi il principio di d'Alembert per trovare l'accelerazione di m_1.

10. Trovare le superfici di rivoluzione (intorno all'asse x) di area minima passanti per i punti $(0,1)$ e $(1,y_1)$ del piano $z=0$. Mostrare che per y_1 sufficientemente vicino a zero una tale superficie non è regolare.

11. Dimostrare che in un campo finito ogni elemento è somma di due quadrati.

12. Trovare esplicitamente una biiezione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Può f essere scelta continua?

13. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$, e sia $L > 0$. Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente affermazione: esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 - x_2 = L$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

14. Dare un esempio di una funzione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(0,0) = 0$ e per cui $(0,0)$ non è punto di minimo relativo, pur essendo punto di minimo relativo (stretto) per la restrizione di f ad una qualunque retta passante per l'origine.

15. Sia $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Si consideri il sottoinsieme $E = \{f \in X : f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f \text{ nondecrescente}\}$. Dire se E è aperto, chiuso, limitato, sequenzialmente compatto in X.

16. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso convesso e contenente l'origine e K^* il suo *insieme polare* cioè $K^* = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot x \leq 1 \text{ per ogni } x \in K\}$. Si dimostri che K^* è limitato se e solo se $\dim K = n$ e l'origine appartiene all'interno di K.

17. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $[0,1]$. Sia $Y := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Determinare la distribuzione di probabilità e la media di Y.

Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXIV Ciclo

Università di Udine

3 novembre 2008

Tema B

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Azione a contatto e azione a distanza nell'elettromagnetismo.
2. Interpretazione macroscopica e microscopica dell'entropia in Fisica.
3. Si discuta il funzionamento di un rivelatore di particelle, evidenziando i principi fisici su cui si basa la rivelazione.
4. Si discuta uno o più esempi di applicazione di metodi Monte Carlo in fisica.
5. I difetti nei solidi cristallini.
6. Teoremi di conservazione nella meccanica Lagrangiana.
7. Problemi di equilibrio in presenza di vincoli. Il caso dei vincoli monolateri.
8. Modi e frequenze proprie di modelli strutturali in elasticità lineare.
9. Il teorema di proiezione di minima distanza su un sottinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert e alcune sue applicazioni.
10. Alcuni teoremi ed applicazioni relativi al concetto di categoria secondo Baire.
11. Curve rettificabili e integrali curvilinei.
12. Gruppi di permutazioni.

Problemi

Svolgere quanti più problemi si riesce.

1. Si consideri la funzione d'onda per lo stato fondamentale della buca di potenziale infinita 1-dimensionale compresa fra $x = 0$ e $x = a$ ($a > 0$). Calcolare i valori medi di x, p e p^2 per una particella di massa m.

2. Una antenna parabolica avente un diametro di 20 m riceve (a incidenza normale) un segnale radio da una sorgente distante. Il segnale radio è un'onda continua sinusoidale con ampiezza $E_{\max} = 0.200\ \mu\text{V/m}$. L'antenna assorbe tutte le radiazioni. Trovare (A) la massima ampiezza del campo magnetico in questa onda, (B) l'intensità della radiazione ricevuta dall'antenna, (C) la potenza ricevuta dall'antenna. ($\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ unità S.I.).

3. Un punto materiale di massa 900 kg che viaggia a velocità $0.850c$ collide con un punto materiale di massa 1400 kg; i due oggetti si fondono. Trovare (a) la velocità e (b) la massa dell'oggetto composti (non c'è dissipazione).

4. Un punto materiale si muove all'interno di una superficie sferica, priva di attrito. Nel punto più alto della sua traiettoria si trova alla quota del centro della superficie sferica, con una velocità $V_0 = 1.00$ m/s, mentre nel punto più basso della traiettoria il punto materiale possiede la velocità $V_1 = 2.00$ m/s. Determinare il raggio della superficie sferica.

5. Due bolle di sapone di identico raggio di equilibrio R_1 e tensione superficiale σ si toccano e si fondono in una unica bolla di raggio di equilibrio R_2 senza che avvenga un travaso di gas fra l'interno delle bolle e l'esterno. Assumendo che la temperatura T_o e la pressione all'esterno delle bolle P_o siano costanti e che il gas nelle bolle si comporti come ideale, si trovi un'equazione che fornisca R_2 in funzione di R_1, σ e P_o.

6. Calcolare l'espressione per la distanza di equilibrio di un cristallo ionico unidimensionale costituito da atomi di carica alternata $\pm q$ e un'energia potenziale di interazione $V(r) = A/r^8 \pm q^2/r$, dove il primo termine agisce solo tra atomi primi vicini ed il segno del secondo termine è legato al carattere attrattivo o repulsivo dell'interazione coulombiana tra coppie di cariche.

7. (a) Mostrare che la lunghezza d'onda di de Broglie per una particella di massa m che si muove ad una velocità pari a quella più probabile per una distribuzione maxwelliana (analoga a quella di un gas ideale) a temperatura T è $\lambda = h/\sqrt{2mk_BT}$ (dove $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K sono le costanti di Planck e Boltzmann, rispettivamente). (b) Calcolare la lunghezza d'onda di de Broglie di un neutrone ($m_n = 1.6747 \cdot 10^{-27}$ kg) che si muove alla velocità più probabile di una maxwelliana a $T = 20°$ C e il suo rapporto con una tipica distanza interatomica in un solido.

8. Una particella intermedia tra altre due poste a distanza d interagisce con queste secondo una forza di attrazione/repulsione dipendente dalla mutua distanza r con la legge $F = \frac{r_0}{r} - \frac{r_0^2}{r^2}$. Trovare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità in funzione di d.

9. Un piccolo meteorite si avvicina alla terra con eccentricità b e velocità v_∞ all'infinito. Mostrare che il meteorite colpirà la terra se $b < a\sqrt{1 + (v_0/v_\infty)^2}$, dove a è il raggio della terra e v_0 la *velocità di fuga*.

10. Supponiamo di scavare un tunnel rettilineo che congiunga due punti qualsiasi della superficie terrestre, anche non antipodali, e di avere un grave di massa m che scorra senza attrito lungo il tunnel (ignoriamo la rotazione terrestre). Liberiamo il grave a velocità zero a un estremo del tunnel. Dimostrare che il grave emergerà all'altra estremità del tunnel dopo un tempo di circa 42.2 minuti, indipendente dalla lunghezza del tunnel. Si assuma che il potenziale gravitazionale all'interno della terra a distanza r dal centro sia $\frac{1}{2}(g/R)r^2$, dove g è l'accelerazione di gravità ed $R = 6371$ Km il raggio terrestre.

11. Sia A un dominio di ideali principali che non è un campo. Provare che A ha infiniti elementi primi.

12. Sia $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ il disco unitario e sia S^1 la sua frontiera. Dimostrare che non esiste un'applicazione continua $f\colon B^2 \to S^1$ con $f(x) = x$ per ogni $x \in S^1$.

13. Trovare l'insieme dei valori del parametro reale k per i quali il problema di Cauchy $x' = (1 + x^2)t$, $x(0) = k$ ha soluzione definita sull'intervallo $[0, 1]$.

14. Si considerila forma differenziale: $\omega(x, y) := ((2x-y)dx+(x+2y)dy)/(x^2+y^2)$. Calcolare l'integrale di ω lungo il segmento di retta che va dal punto $(1, 0)$ al punto $(2, 0)$. Si consideri poi la curva $\gamma(t) := (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t)$, per $1 \leq t \leq 2$. Calcolare $\int_\gamma \omega$.
(Suggerimento: osservare che, date le proprietà di ω, l'integrale può essere calcolato in modi diversi).

15. Sia $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$. Si consideri il sottoinsieme $E = \{f \in X : f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f \text{ nondecrescente}\}$. Dire se E è aperto, chiuso, limitato, sequenzialmente compatto in X.

16. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso convesso e contenente l'origine e K^* il suo *insieme polare* cioè $K^* = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot x \leq 1 \text{ per ogni } x \in K\}$. Si dimostri che K^* è limitato se e solo se $\dim K = n$ e l'origine appartiene all'interno di K.

17. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Sia $Y := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Determinare la distribuzione di probabilità e la media di Y.

Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXIV Ciclo

Università di Udine

3 novembre 2008

Tema C

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Il concetto di energia e la sua conservazione.
2. Interpretazione macroscopica e microscopica dell'entropia in Fisica.
3. Si discuta il funzionamento di uno strumento per la rivelazione di particelle, evidenziando i principi fisici su cui si basa la rivelazione.
4. Sistemi di particelle fuori dall'equilibrio: tecniche computazionali per la simulazione.
5. Difetti nei solidi cristallini.
6. Teoremi di conservazione nella meccanica Lagrangiana.
7. L'equazione delle onde e la soluzione di D'Alembert.
8. Vincoli olonomi e anolonomi.
9. Alcuni teoremi ed applicazioni relativi al concetto di categoria secondo Baire.
10. Convergenza delle serie di potenze.
11. Anelli di serie di potenze formali.

Problemi

Svolgere quanti più problemi si riesce.

1. Si consideri la funzione d'onda per lo stato fondamentale della buca di potenziale infinita 1-dimensionale compresa fra $x = 0$ e $x = a$ ($a > 0$). Calcolare i valori medi di x, p e p^2 per una particella di massa m.

2. Una antenna parabolica avente un diametro di 20 m riceve (a incidenza normale) un segnale radio da una sorgente distante. Il segnale radio è un'onda continua sinusoidale con ampiezza $E_{\max} = 0.200\ \mu$V/m. L'antenna assorbe tutte le radiazioni. Trovare (A) la massima ampiezza del campo magnetico in questa onda, (B) l'intensità della radiazione ricevuta dall'antenna, (C) la potenza ricevuta dall'antenna. ($\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ unità S.I.).

3. Un punto materiale di massa 900 kg che viaggia a velocità $0.850c$ collide con un punto materiale di massa 1400 kg; i due oggetti si fondono. Trovare (a) la velocità e (b) la massa dell'oggetto composti (non c'è dissipazione).

4. Un punto materiale si muove all'interno di una superficie sferica, priva di attrito. Nel punto più alto della sua traiettoria si trova alla quota del centro della superficie sferica, con una velocità $V_0 = 1.00$ m/s, mentre nel punto più basso della traiettoria il punto materiale possiede la velocità $V_1 = 2.00$ m/s. Determinare il raggio della superficie sferica.

5. Due bolle di sapone di identico raggio di equilibrio R_1 e tensione superficiale σ si toccano e si fondono in una unica bolla di raggio di equilibrio R_2 senza che avvenga un travaso di gas fra l'interno delle bolle e l'esterno. Assumendo che la temperatura T_o e la pressione all'esterno delle bolle P_o siano costanti e che il gas nelle bolle si comporti come ideale, si trovi un'equazione che fornisca R_2 in funzione di R_1, σ e P_o.

6. Calcolare l'espressione per la distanza di equilibrio di un cristallo ionico unidimensionale costituito da atomi di carica alternata $\pm q$ e un'energia potenziale di interazione $V(r) = A/r^8 \pm q^2/r$, dove il primo termine agisce solo tra atomi primi vicini ed il segno del secondo termine è legato al carattere attrattivo o repulsivo dell'interazione coulombiana tra coppie di cariche.

7. (a) Mostrare che la lunghezza d'onda di de Broglie per una particella di massa m che si muove ad una velocità pari a quella più probabile per una distribuzione maxwelliana (analoga a quella di un gas ideale) a temperatura T è $\lambda = h/\sqrt{2mk_BT}$ (dove $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K sono le costanti di Planck e Boltzmann, rispettivamente). (b) Calcolare la lunghezza d'onda di de Broglie di un neutrone ($m_n = 1.6747 \cdot 10^{-27}$ kg) che si muove alla velocità più probabile di una maxwelliana a $T = 20^\circ$ C e il suo rapporto con una tipica distanza interatomica in un solido.

8. Un punto materiale di massa m, soggetto al proprio peso, si muove senza attrito su una sfera di raggio R. Discutere il moto in funzione della velocità iniziale, sapendo che esso ha inizio da un punto sull'equatore della sfera.

9. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere ad un piano orizzontale π. Sul punto P agisce una forza elastica di richiamo $\mathbf{f} = -\kappa \overrightarrow{OP}$, con $\kappa > 0$, con centro O solidale al piano π. Detto piano ruota uniformemente attorno ad una retta verticale r ad esso incidente in un dato punto O'. Sia $\vec{\omega}$ la velocità angolare di questo movimento, $\|\overrightarrow{OO'}\| = d$, liscio il vincolo imposto al punto P. Si chiede: (a) Individuare le eventuali posizioni di equilibrio del punto P nel riferimento solidale al piano π; (b) determinare le traiettorie degli eventuali moti uniformi del punto P nel riferimento solidale al piano π; (c) nell'ipotesi che sia $\kappa = 2m\omega^2$, calcolare i valori della velocità $\vec{v}_0$ che si deve attribuire al punto P in un dato istante t_0, perché partendo da O' in tale istante si muova conseguentemente di moto uniforme nel riferimento solidale al piano π.

10. Supponiamo di scavare un tunnel rettilineo che congiunga due punti qualsiasi della superficie terrestre, anche non antipodali, e di avere un grave di massa m che scorra senza attrito lungo il tunnel (ignoriamo la rotazione terrestre). Liberiamo il grave a velocità zero a un estremo del tunnel. Dimostrare che il grave emergerà all'altra estremità del tunnel dopo un tempo di circa 42.2 minuti, indipendente dalla lunghezza del tunnel. Si assuma che il potenziale gravitazionale all'interno della

terra a distanza r dal centro sia $\frac{1}{2}(g/R)r^2$, dove g è l'accelerazione di gravità ed $R = 6371$ Km il raggio terrestre.

11. Il grafo di Petersen Γ ha dieci vertici $\{A, B, C, D, E, a, b, c, d, e\}$ e quindici lati $\{AB, BC, CD, DE, EA, Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, ac, ce, eb, bd, da\}$. Provare che il gruppo degli automorfismi di Γ è S_5.

12. Sia $X \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ l'insieme $X = \{((x, y), (\xi : \eta)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x\eta = y\xi\}$. Sia $E \subset X$ l'insieme $E = (0, 0) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che X è una superficie, E una curva in X. Si consideri la proiezione $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sul secondo fattore. Dimostrare che (X, π) è un fibrato in rette su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che X è diffeomorfo al nastro di Moebius, e che $X \setminus E$ è diffeomorfo al cilindro.

13. Sia $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Si consideri il sottoinsieme $E = \{f \in X : f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f \text{ nondecrescente}\}$. Dire se E è aperto, chiuso, limitato, sequenzialmente compatto in X.

14. Dimostrare che il sistema di equazioni: $2x - \sin(x + y) = 5$, $3y + \arctan(x - y) = -3$ ha un'unica soluzione.

15. Sia I un intervallo dei reali ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Per $x, y \in I$ poniamo $F(x, y) := (f(x) - f(y))/(x - y)$ se $x \neq y$, e $F(x, x) := f'(x)$. Dimostrare che f è di classe $\mathcal{C}^1$ su I se e solo se F è continua su $I \times I$.

16. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso convesso e contenente l'origine e K^* il suo *insieme polare* cioè $K^* = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot x \leq 1 \text{ per ogni } x \in K\}$. Si dimostri che K^* è limitato se e solo se $\dim K = n$ e l'origine appartiene all'interno di K.

17. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Sia $Y := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Determinare la distribuzione di probabilità e la media di Y.