Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica, XXIII Ciclo
Prova di ammissione

Tema A

The candidate should discuss one of the following themes and solve as many problems as possible. Il tempo a disposizione è 4 ore.

Dissertazioni

1. (D) Evoluzione spontanea dei processi e grandezze termodinamiche rilevanti.
2. (D) Equilibrio termodinamico e diagrammi di fase.
3. (F) Per una classe di sorgenti d'emissione, il candidato discuta qualitativamente e quantitativamente lo spettro d'emissione osservato, e le informazioni fisiche da esso deducibili.
4. (F) Due elementi fondamentali di un rivelatore di particelle nella fisica ed astrofisica sperimentale sono i tracciatori ed i calorimetri. Si riassuma lo stato dell'arte di uno di questi due elementi con enfasi sull'informazione che deve fornire a complemento di quella fornita dall'altro.
5. (F) Proprietà elettroniche e ottiche dei semiconduttori.
6. (M) Conservation theorems in Lagrangian mechanics.
7. (DM) Fourier series.
8. (M) Baire's theorem and its application to functional analysis and/or measure theory.
9. (M) Function fields of algebraic curves.
10. (M) The symmetric group.
11. (M) Flow problems with minimum cost.

Problemi

1. (DF) Calcolare i livelli energetici di una buca di potenziale unidimensionale a pareti di altezza infinita compresa fra $x = 0$ e $x = a$, con $a > 0$. Verificare che per il livello fondamentale vale il principio d'indeterminazione.
2. (DF) La radiazione solare che raggiunge la Terra ha un'intensità, appena fuori dall'atmosfera, di $1.4\ kW/m^2$. Assumendo che la Terra sia un disco piatto e che tutta la radiazione venga assorbita, calcolare la forza esercitata dalla radiazione solare sulla Terra. (Assumere il raggio della Terra di $6400\ km$).
3. (DF) Calcolare l'energia minima alla quale un elettrone e un muone emettono radiazione Cherenkov in acqua (indice di rifrazione $n = 1.33$). Assumere per l'elettrone una massa $m_e = 0.511\ MeV/c^2$ e per il muone una massa $m_\mu = 106\ MeV/c^2$. Calcolare l'angolo di emissione per energie molto maggiori dell'energia minima.
4. (DF) Si dimostri che la produzione di una coppia e^+e^- non può avvenire nel vuoto.
5. (DF) Si consideri il modello di un gas di N elettroni liberi a temperatura nulla ($T = 0\,K$).
   a) Determinare l'espressione dell'energia cinetica degli elettroni;
   b) Ricavare la relazione tra la pressione P e il volume V occupato dal gas (equazione di stato del gas);
   c) Dimostrare che il modulo di compressione $B = -V(dP/dV)$ del gas è pari a $B = (5/3)P$.
6. (DF) Radiazioni X con $\lambda = 0.5$ Å incidono su un materiale. I fotoelettroni provenienti dal livello K del materiale si muovono lungo una circonferenza di raggio $R = 23\ mm$ in presenza di un campo magnetico $B = 2 \times 10^{-2}\ T$. Determinare l'energia di legame degli elettroni.

7. (DF) Dato il campo elettrico $\bar{E} = A\cos\omega(t - \frac{z}{c})\hat{\jmath}$, trovare l'espressione dell'intensità del campo magnetico $\bar{H}$ nel vuoto.

8. (M) Let $(a_{k,j})_{k,j\in\mathbb{N}}$ be a double sequence of reals and $a \in \mathbb{R}$. For anyone of the subsequent conditions

   a. $\lim_k \lim_j a_{k,j} = a$,

   b. $\limsup_k \lim_j a_{k,j} = a$,

   c. $\lim_k \limsup_j a_{k,j} = a = \lim_k \liminf_j a_{k,j}$,

   say, and prove, if it implies or not, one or more of the subsequent propositions

   (a) there exixts a strictly increasing sequence of positive integers $j(k)$ such that the sequence $(a_{k,j(k)})$ converges to a,

   (b) there exists a strictly increasing sequence of positive integers $k(j)$ such that the sequence $(a_{k(j),j})$ converges to a,

   (c) there exists a non deacreasing sequence of positive integers $k(j) \to \infty$ such that the sequence $(a_{k(j),j})$ converges to a.

9. (M) (a) Study the behaviour of the sequence

$$x_0 = a,\ x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})\ (n \geq 1)$$

   where $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Study the behaviour of the sequence

$$x_0 = a,\ x_n = 4x_{n-1}^2(1 - x_{n-1})\ (n \geq 1)$$

   where a belongs to the interval $[0, 1]$.

10. (M) Let E be a Banach space and $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence in the unit ball B of E. Let $e_n = (\delta_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ where $\delta_{n,n} = 1$ and $\delta_{n,m} = 0$ if $n \neq m$. Prove that

   a) there exists a (unique) linear continuous operator $T : \ell_1 \to E$ such that $T(e_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

   b) if E is separable and if $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ is dense in B, then T is surjective.

   c) deduce that any separable Banach space is isomorphic (algebraically and topologically) to a quotient space of ℓ_1.

11. (M) Let $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ be the map defined by

$$F(z) = (e^z, e^{\sqrt{2}z}).$$

   Prove that it is surjective. Determine the Zariski's closure of the image $F(\mathbb{C})$. Determine also the closure of $F(\mathbb{C})$ in the euclidean topology of $\mathbb{C}^2$.

12. (M) Let $N \geq 2$ be an integer. Prove that the canonical projection $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ is surjective. The candidate should propose some generalization.

13. (M) Let σ, τ be automorphisms of the function field $\mathbb{C}(t)$ which fix the constants and map, respectively, t to

$$\sigma : t \mapsto \frac{1}{1-t}, \qquad \tau : t \mapsto \frac{1}{t}.$$

   Determine the structure of the generated group G. Using generators, determine the fixed fields $\mathbb{C}(t)^G, \mathbb{C}(t)^{<\sigma>}, \mathbb{C}(t)^{<\tau>}$ for the group G and its subgroups generated by σ and τ. Determine all subfields K which satisfy $\mathbb{C}(t)^G \subset K \subset C(t)$.

14. (M) Let G be a non oriented graph and ΔG denotes the maximum degree of its nodes.

   (a) Prove that the chromatic number $\chi(G)$ of the graph is not greater than $\Delta(G) + 1$.

   (b) Give two examples for which the equality holds.