Dottorato di Ricerca in Matematica e Fisica
XXII Ciclo

Università di Udine

2 novembre 2006

Tema A

Dissertazioni

Svolgere una dissertazione a scelta fra le seguenti.

1. Si descriva uno strumento per la rilevazione di una particolare radiazione, giustificandone le caratteristiche in base alla gamma di energia della radiazione da rilevare, alla natura dell'interazione di questa radiazione con la materia a queste energie, alle proprietà che si desiderano misurare e alla risoluzione che si mira ad ottenere.
2. Metodi teorici e tecniche sperimentali per lo studio della struttura e della dinamica dei materiali.
3. Onde e oscillazioni nella didattica della fisica.
4. Esiste o potrebbe esistere un legame fra la fisica e la teoria dell'informazione?
5. Piccole oscillazioni di un sistema olonomo a vincoli fissi, perfetti e bilaterali attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.
6. Il processo di Poisson.
7. La decomposizione ai valori singolari di matrici o di operatori compatti.
8. Matroidi e algoritmo greedy.
9. Equazioni differenziali ordinarie lineari.
10. Teoremi di Sylow per gruppi finiti.

Problemi

Svolgere quanti più problemi si riesce.

1. Si vuole distinguere fra pioni carichi e muoni, entrambi a un'energia di 140 GeV, utilizzando il fatto che uno dei due emetta radiazione al passaggio attraverso un gas e l'altro no. Si calcolino i possibili valori di indice di rifrazione del mezzo utili alla discriminazione tra i muoni ed i pioni. Si supponga che $m_\pi c^2 = 140$ MeV e che $m_\mu c^2 = 105$ MeV.

2. La parte reale della funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno è proporzionale a e^{-r/a_0}, dove a_0 è il raggio di Bohr. Calcolare il valore del raggio per il quale la probabilità di trovare la particella è massima.

3. Si consideri un gas unidimensionale di particelle di larghezza a confinate in un segmento di lunghezza L. Indicando con x_i la posizione del centro dell'i-esima particella, le particelle interagiscono fra loro attraverso il potenziale seguente: $U(x_i - x_j) = \infty$ ($|x_i - x_j| < a$); $U(x_i - x_j) = 0$ ($|x_i - x_j| \geq a$). Determinare l'equazione di stato del gas.

4. Un punto materiale si muove senza attrito all'interno di una superficie conica con l'asse di simmetria verticale e vertice verso il basso. La sua traiettoria è confinata entro una sezione del cono alta Δh. Determinare la quota del punto di minima altezza della traiettoria (alla quale il punto materiale possiede velocità v), rispetto a quella del vertice del cono. Utilizzare per i calcoli i valori $\Delta h = 0.10$ m, $g = 9.81$ m/s^2, $v = 1.00$ m/s.

5. Un sistema materiale olonomo è costituito da due punti materiali pesanti, P_1 e P_2 di masse m_1 e m_2 rispettivamente, vincolati ad appartenere, senza attrito, ad un retta verticale a. I due punti si scambiano una forza elastica di costante k, ed inoltre, su P_1 agisce una forza elastica $\vec{f_1} = -k\overrightarrow{OP_1}$ di centro un punto O della retta a e con la medesima costante. Si chiede: (i) determinare le eventuali posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità; (ii) scrivere le equazioni di moto del sistema.

6. Sia G un gruppo finito, H e K sottogruppi di G. Si provi che H agisce transitivamente per moltiplicazione a destra sull'insieme delle classi laterali destre di K in G se e solo se K agisce transitivamente per moltiplicazione a destra sull'insieme delle classi laterali destre di H in G.

7. Sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ l'applicazione $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx)$. Dimostrare che l'immagine $f(S^2) = Y$, è una sottovarietà di $\mathbb{R}^6$. Dimostrare che Y è isomorfo a $\mathbb{RP}^2$. Studiare l'applicazione indotta dalla proiezione da un punto $p \in Y$.

8. Si consideri densità di probabilità definita come $f(x, y) := 6(x^2 + y^2)$ se $x, y \in [-1/2, 1/2]$, e $f(x, y) := 0$ altrimenti. Si determini la probabilità dell'evento $(X + Y \geq 0)$ e si calcolino il valore atteso, la mediana e la varianza della componente marginale X.

9. Esibire esempi di funzioni $f\colon X \to Y$ che siano convesse e semicontinue inferiormente ma non continue, nei casi in cui gli spazi X ed Y siano (i) $X = \mathbb{R}^n$ e $Y =]-\infty, +\infty]$, oppure (ii) $X = L^2(0, 1)$ e $Y = \mathbb{R}$, con un'opportuna scelta della topologia.

10. Si consideri la serie numerica $\sum_{n\geq 2}(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log(n+1)} - \frac{2}{\log(n+2)})$. Trovarne la somma, se esiste. (C'è una formula ricorsiva per le somme parziali. . .)

11. Discutere la risoluzione numerica alle differenze finite del problema ellittico $\Delta u + cu = f$ nel dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee, con c costante positiva. Fornire una limitazione superiore alla norma della soluzione discreta.