Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica, XX Ciclo
Prova di ammissione

Tema A

Il candidato svolga una dissertazione a scelta e risolva il maggior numero possibile di problemi. Il tempo a disposizione è 5 ore.

Dissertazioni

1. Il teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti.
2. Presentare e discutere uno o più sistemi di deduzione (p.es., sistemi alla Hilbert, deduzione naturale, risoluzione, tableaux semantici, ...).
3. Superfici di Riemann compatte.
4. Convergenza uniforme di successioni di funzioni.
5. Tecniche poliedrali per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria.
6. Norme vettoriali e matriciali in $\mathbb{R}^n$.
7. Il candidato deduca l'equazione di Laplace, enunci i problemi ai valori al contorno ad essa associati e ne discuta almeno uno.
8. Grandezze fisico/termodinamiche e tecniche sperimentali adatte alla caratterizzazione di un sistema fisico in prossimità di una transizione di fase.
9. Si accenni alle caratteristiche dei raggi cosmici, descrivendo un apparato sperimentale per la loro rivelazione.
10. Calori specifici nei solidi.
11. Analisi di segnali e trasformate di Fourier.

Problemi

1. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Sia X un insieme, eventualmente infinito, e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$ (cioè $\mathcal{A}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$, e se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$). Supponiamo che $\mathcal{A}$ contenga un numero finito di elementi. Dimostrare che esiste un insieme finito Y tale che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}(Y)$ sono isomorfe come algebre di Boole (cioè esiste una biiezione $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ con $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) = Y$, $f(A^c) = f(A)^c$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$).

3. Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ una proiettività. Siano p e q due punti distinti di $\mathbb{P}^1$ tali che $f(p) = q$ e $f(q) = p$. Dimostrare che f^2 è l'identità.

4. Della funzione di due variabili $f(x, y) := -4x^4+8x^3-8x^2+4xy-2x-y^2+y$ trovare i punti stazionari e decidere il loro carattere (massimo, minimo o sella).

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Dimostrare che il metodo iterativo $x_{i+1} = Ax_i + v$ è convergente e se ne calcoli il limite. Facoltativamente, generalizzare il caso precedente considerando per una dimensione n arbiraria,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & O \\ 1/2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/2 \\ O & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la *matrice di Tutte* di G, $T(G)$, è la matrice $|V| \times |V|$ definita da
$$T(G)_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i < j \\ -x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i > j \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
dove le x_{ij} sono variabili. Si provi che G contiene un accoppiamento perfetto se e solo se il polinomio $\det T(G)$ non è identicamente nullo. Si spezzi la dimostrazione nei due casi $|V|$ dispari e $|V|$ pari.

(Si ricorda che un accoppiamento perfetto in un grafo G è un sottoinsieme M di lati tale che in ogni nodo di G incide esattamente un lato di M.)

7. Si consideri una catena (un polimero) costituita da un grande numero di unità (monomeri). L'energia associata ad una conformazione sia data da $U(r) = \alpha r^2$, dove r corrisponde alla distanza tra gli estremi della catena e α è una costante. Il numero di configurazioni della catena corrispondente ad un valore di r compreso tra r e $r + dr$ è proporzionale a $4\pi r^2$. Supponendo che r possa variare tra 0 e ∞, determinare un'espressione in funzione di α e della temperatura T per:

(a) il valore più probabile di r;

(b) $\langle r^2 \rangle$.

8. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere ad un piano orizzontale π. Sul punto P agisce una forza elastica di richiamo $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{OP}$, $(k > 0)$, con centro O solidale al piano π. Detto piano ruota uniformemente attorno ad una retta verticale r ad esso incidente in un dato punto O'. Sia $\overrightarrow{\omega}$ la velocità angolare di questo movimento, $|\overrightarrow{OO'}| = d$, liscio il vincolo imposto al punto P. Si chiede:

   (a) Individuare le eventuali posizioni di equilibrio del punto P nel riferimento solidale al piano π;

   (b) determinare le traiettorie degli eventuali moti uniformi del punto P nel riferimento solidale al piano π;

   (c) nell'ipotesi che sia $k = 2m\omega^2$, calcolare i valori della velocità $\overrightarrow{v_o}$ che si deve attribuire al punto P in un dato istante t_o, perché partendo da O' in tale istante si muova conseguentemente di moto uniforme nel riferimento solidale al piano π.

9. Risolvere l'equazione $uu_x + u_y = 0$ con la condizione $u(x, 0) = x$.

10. Qual è la minima energia E di un elettrone e di un positrone ($m = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$) per produrre due muoni ($M = 0.106\,\mathrm{GeV}/c^2$) se le due particelle si muovono l'una contro l'altra con uguale energia? E se una delle due è ferma?

11. Calcolare la soglia energetica per l'emissione di radiazione Cherenkov da parte di un muone ($m = 0.106\,\mathrm{GeV}/c^2$) in acqua, assumendo per l'acqua un indice di rifrazione $n = 1.33$. Calcolare l'angolo limite per l'emissione di radiazione Cherenkov in acqua.

12. È data una catena lineare unidimensionale con condizioni al contorno periodiche, costituita da N atomi di uguale massa m separati da una distanza di equilibrio a. Le interazioni sono solo fra primi vicini e di natura armonica, con costanti di forza alternativamente C e $2C$ muovendosi lungo la catena. Trovare e descrivere il modo di oscillazione con la frequenza più alta. Esiste una regione di frequenze non permesse? Se sì, calcolarne l'ampiezza.

13. Se si inserisce un contatore di energia nel circuito primario di un trasformatore esso non segna apprezzabile consumo fino a quando, chiudendo il circuito, passa corrente nel secondario. Perché?

Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica, XX Ciclo
Prova di ammissione

Tema B

Il candidato svolga una dissertazione a scelta e risolva il maggior numero possibile di problemi. Il tempo a disposizione è 5 ore.

Dissertazioni

1. I teoremi di Sylow.
2. Elencare e discutere gli assiomi della teoria degli insiemi.
3. Gli assiomi della geometria Euclidea.
4. Convergenza uniforme di successioni di funzioni.
5. Tecniche di programmazione dinamica per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria.
6. Metodi iterativi per la risoluzione di equazioni lineari.
7. Il candidato deduca l'equazione delle onde, enunci i problemi ai valori iniziali e al contorno ad essa associati e ne discuta almeno uno.
8. Grandezze fisico/termodinamiche e tecniche sperimentali adatte alla caratterizzazione di un sistema fisico in prossimità di una transizione di fase.
9. Si accenni alle caratteristiche dei raggi cosmici, descrivendo un apparato sperimentale per la loro rivelazione.
10. Proprietà dei solidi e calori specifici.
11. Trasformate di Fourier e analisi di segnali.

Problemi

1. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
2. Sia X un insieme, eventualmente infinito, e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$ (cioè $\mathcal{A}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$, e se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$). Supponiamo che $\mathcal{A}$ contenga un numero finito di elementi. Dimostrare che esiste un insieme finito Y tale che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}(Y)$ sono isomorfe come algebre di Boole (cioè esiste una biiezione $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ con $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) = Y$, $f(A^c) = f(A)^c$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$).

3. Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ una proiettività. Siano p e q due punti distinti di $\mathbb{P}^1$ tali che $f(p) = q$ e $f(q) = p$. Dimostrare che f^2 è l'identità.

4. Della funzione di due variabili $f(x, y) := -4x^4+8x^3-8x^2+4xy-2x-y^2+y$ trovare i punti stazionari e decidere il loro carattere (massimo, minimo o sella).

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile e x^* un punto fisso di f. Supponiamo che per lo Jacobiano di f valga $\|J_f(x)\| \leq \lambda < 1$, $\forall x \in B(x^*, r)$. Si consideri una successione definita da

$$x_0 \in B(x^*, r), \qquad x_{i+1} = f(x_i) + \delta_i,$$

dove $\|\delta_i\| \leq \delta$, con $0 < \delta \ll 1$ fissato. Dimostrare che esiste $\rho > 0$ tale che, per i sufficientemente elevato, $x_i \in B(x^*, \rho)$.

6. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la *matrice di Tutte* di G, $T(G)$, è la matrice $|V| \times |V|$ definita da

$$T(G)_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i < j \\ -x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i > j \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove le x_{ij} sono variabili. Si provi che G contiene un accoppiamento perfetto se e solo se il polinomio $\det T(G)$ non è identicamente nullo. Si spezzi la dimostrazione nei due casi $|V|$ dispari e $|V|$ pari.

(Si ricorda che un accoppiamento perfetto in un grafo G è un sottoinsieme M di lati tale che in ogni nodo di G incide esattamente un lato di M.)

7. Si consideri un sistema di particelle classiche in un reticolo di N siti avente l'Hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^{N} \mu n_i + \varepsilon \delta_{n_i,0}$$

dove $n_i = 0, 1, 2 \ldots$ è il numero di particelle che occupano il sito i-esimo ($i = 1, 2, \ldots, N$) e μ è il potenziale chimico. Determinare, a seconda che sia $\varepsilon > \mu > 0$ o $\mu > \varepsilon > 0$:

   (a) lo stato fondamentale di H;

   (b) la densità $\rho = \langle n \rangle$ delle particelle.

8. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere ad un piano orizzontale π. Sul punto P agisce una forza elastica di richiamo $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{OP}$, $(k > 0)$, con centro O solidale al piano π. Detto piano ruota uniformemente attorno ad una retta verticale r ad esso incidente in un dato punto O'. Sia $\overrightarrow{\omega}$ la velocità angolare di questo movimento, $|\overrightarrow{OO'}| = d$, liscio il vincolo imposto al punto P. Si chiede:

(a) Individuare le eventuali posizioni di equilibrio del punto P nel riferimento solidale al piano π;

(b) determinare le traiettorie degli eventuali moti uniformi del punto P nel riferimento solidale al piano π;

(c) nell'ipotesi che sia $k = 2m\omega^2$, calcolare i valori della velocità $\overrightarrow{v_o}$ che si deve attribuire al punto P in un dato istante t_o, perché partendo da O' in tale istante si muova conseguentemente di moto uniforme nel riferimento solidale al piano π.

9. Risolvere l'equazione $uu_x + u_y = 0$ con la condizione $u(x, 0) = x$.

10. Qual è la minima energia E di un elettrone e di un positrone ($m = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$) per produrre due pioni carichi ($M = 0.140\,\mathrm{GeV}/c^2$) se le due particelle si muovono l'una contro l'altra con uguale energia? E se una delle due è ferma?

11. Calcolare la soglia energetica per l'emissione di radiazione Cherenkov da parte di un pione carico ($m = 0.140\,\mathrm{GeV}/c^2$) in acqua, assumendo per l'acqua un indice di rifrazione $n = 1.33$. Calcolare l'angolo limite per l'emissione di radiazione Cherenkov in acqua.

12. È data una catena lineare unidimensionale con condizioni al contorno periodiche, costituita da N atomi di massa alternativamente m_1 e m_2 muovendosi lungo la catena, separati da una distanza di equilibrio a. Le interazioni sono solo fra primi vicini e di natura armonica, con costante di forza C. Trovare e descrivere il modo di oscillazione con la frequenza più alta. Esiste una regione di frequenze non permesse? Se sì, calcolarne l'ampiezza.

13. Un circuito è formato da una bobina di 600 spire, ciascuna di sezione $3\,\mathrm{cm}^2$, chiusa su un resistore e un galvanometro. La resistenza complessiva del circuito così formato è di 40 Ω. Si produce una corrente indotta nel circuito portando velocemente un magnete da una distanza di 2 m fino a inserirlo completamente nella bobina. Nel galvanometro si registra una corrente, la cui intensità integrata nel tempo è pari a $1.25 \cdot 10^{-4}$ C (corrispondente alla carica che ha complessivamente attraversato una qualsiasi sezione del circuito durante il fenomeno). Determinare l'intensità del campo magnetico generato in prossimità di uno dei poli del magnete.

Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica, XX Ciclo
Prova di ammissione

Tema C

Il candidato svolga una dissertazione a scelta e risolva il maggior numero possibile di problemi. Il tempo a disposizione è 5 ore.

Dissertazioni

1. Campi finiti.
2. Il teorema di compattezza per la logica del primo ordine.
3. Varietà affini e i loro anelli delle coordinate.
4. Convergenza uniforme di successioni di funzioni.
5. Modelli ed algoritmi per problemi di "routing".
6. Metodi diretti per la soluzione di sistemi lineari.
7. Il candidato deduca l'equazione del calore, enunci i problemi ai valori iniziali e al contorno ad essa associati e ne discuta almeno uno.
8. Grandezze fisico/termodinamiche e tecniche sperimentali adatte alla caratterizzazione di un sistema fisico in prossimità di una transizione di fase.
9. Interazione della radiazione elettromagnetica di alta energia con la materia (in appositi rivelatori o nell'atmosfera terrestre): si sviluppi un settore, alla luce delle più avanzate tecniche sperimentali e delle aspettative nella ricerca in Fisica.
10. Il calore specifico nei solidi.
11. Proprietà magnetiche nella materia.

Problemi

1. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ di $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Sia X un insieme, eventualmente infinito, e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di Boole di $\mathcal{P}(X)$ (cioè $\mathcal{A}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{P}(X)$ tale che $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$, e se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$). Supponiamo che $\mathcal{A}$ contenga un numero finito di elementi. Dimostrare che esiste un insieme finito Y tale che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}(Y)$ sono isomorfe come algebre di Boole (cioè esiste una biiezione $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ con $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) = Y$, $f(A^c) = f(A)^c$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$).

3. Sia $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ una proiettività. Siano p e q due punti distinti di $\mathbb{P}^1$ tali che $f(p) = q$ e $f(q) = p$. Dimostrare che f^2 è l'identità.

4. Della funzione di due variabili $f(x, y) := -4x^4+8x^3-8x^2+4xy-2x-y^2+y$ trovare i punti stazionari e decidere il loro carattere (massimo, minimo o sella).

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Dimostrare che il metodo iterativo $x_{i+1} = Ax_i + v$ è convergente e se ne calcoli il limite. Facoltativamente, generalizzare il caso precedente considerando per una dimensione n arbiraria,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & O \\ 1/2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/2 \\ O & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, la *matrice di Tutte* di G, $T(G)$, è la matrice $|V| \times |V|$ definita da
$$T(G)_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i < j \\ -x_{ij} & \text{se } [i, j] \in E \text{ e } i > j \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
dove le x_{ij} sono variabili. Si provi che G contiene un accoppiamento perfetto se e solo se il polinomio $\det T(G)$ non è identicamente nullo. Si spezzi la dimostrazione nei due casi $|V|$ dispari e $|V|$ pari.

   (Si ricorda che un accoppiamento perfetto in un grafo G è un sottoinsieme M di lati tale che in ogni nodo di G incide esattamente un lato di M.)

7. Si consideri un sistema di particelle classiche in un reticolo di N siti avente l'Hamiltoniana
$$H = \sum_{i=1}^{N} \mu n_i - \varepsilon(1 - \delta_{n_i,0})$$

dove $n_i = 0, 1, 2, \ldots$ è il numero di particelle che occupano il sito i-esimo ($i = 1, 2, \ldots, N$) e μ corrisponde al potenziale chimico. Determinare, a seconda che sia $\mu > \varepsilon > 0$ o $\varepsilon > \mu > 0$:

(a) lo stato fondamentale di H;

(b) la densità $\rho = \langle n \rangle$ delle particelle.

8. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad appartenere ad un piano orizzontale π. Sul punto P agisce una forza elastica di richiamo $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{OP}$, ($k > 0$), con centro O solidale al piano π. Detto piano ruota uniformemente attorno ad una retta verticale r ad esso incidente in un dato punto O'. Sia $\overrightarrow{\omega}$ la velocità angolare di questo movimento, $|\overrightarrow{OO'}| = d$, liscio il vincolo imposto al punto P. Si chiede:

   (a) Individuare le eventuali posizioni di equilibrio del punto P nel riferimento solidale al piano π;

   (b) determinare le traiettorie degli eventuali moti uniformi del punto P nel riferimento solidale al piano π;

   (c) nell'ipotesi che sia $k = 2m\omega^2$, calcolare i valori della velocità $\overrightarrow{v_o}$ che si deve attribuire al punto P in un dato istante t_o, perché partendo da O' in tale istante si muova conseguentemente di moto uniforme nel riferimento solidale al piano π.

9. Risolvere l'equazione $uu_x + u_y = 0$ con la condizione $u(x, 0) = x$.

10. Qual è la minima energia E di un elettrone e di un positrone ($m = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$) per produrre un protone e un antiprotone ($M = 0.938\,\mathrm{GeV}/c^2$) se le due particelle si muovono l'una contro l'altra con uguale energia? E se una delle due è ferma?

11. Calcolare la soglia energetica per l'emissione di radiazione Cherenkov da parte di un protone ($m = 0.938\,\mathrm{GeV}/c^2$) in acqua, assumendo per l'acqua un indice di rifrazione $n = 1.33$. Calcolare l'angolo limite per l'emissione di radiazione Cherenkov in acqua.

12. È data una catena lineare unidimensionale con condizioni al contorno periodiche, costituita da N atomi di uguale massa m separati da una distanza di equilibrio a. Le interazioni sono solo fra primi vicini e di natura armonica, con costanti di forza alternativamente C e $2C$ muovendosi lungo la catena. Trovare e descrivere il modo di oscillazione con la frequenza più alta. Esiste una regione di frequenze non permesse? Se sì, calcolarne l'ampiezza.

13. Un generatore di tensione, la cui f.e.m. è $\mathcal{E}$ e la cui resistenza interna è R, viene chiuso su un filo conduttore che presenta una resistenza r per unità di lunghezza. Determinare la lunghezza del filo per cui è massima la potenza dissipata per effetto Joule nel filo. In tale condizione, determinare la potenza prodotta dal generatore.