Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica
Prova di ammissione, a.a. 2003/04

Il candidato svolga una dissertazione a scelta e risolva il maggior numero possibile di problemi. Il tempo a disposizione è 5 ore.

Dissertazioni

1. Teoria di Galois.
2. Forme differenziali lineari.
3. Il valore atteso e il valore atteso condizionale.
4. La teoria delle reti di flusso.
5. Simmetrie e leggi di conservazione in meccanica e teoria dei campi.
6. Il metodo Monte Carlo nella risoluzione di problemi complessi.
7. Interpretazione macroscopica e microscopica dell'entropia.
8. Analizzare un caso particolare di ricerca di una nuova particella e/o di nuove forme di materia/energia nell'Universo.

Problemi

1. Una particella relativistica di massa m ed energia E collide con un'altra particella di massa m in quiete. Qual è l'angolo tra le due particelle nel laboratorio dopo l'urto? Qual è l'angolo minimo? Confrontare con il caso nonrelativistico.
2. Si consideri un gas di elettroni liberi in un campo magnetico B uniforme e costante. Chiamato n il numero di elettroni per unità di volume, si determini:
   (a) l'energia magnetica del gas elettronico e la sua magnetizzazione M in funzione della temperatura T;
   (b) i valori limite della magnetizzazione nei casi limite $T \to 0$ e $T \to \infty$.
3. Un elettrone è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}$, e all'istante $t = 0$ si trova in un autostato di spin con autovalore $\hbar/2$ lungo una direzione ortogonale a $\mathbf{B}$, individuata da un versore $\mathbf{n}$. Determinare per quali valori di $t > 0$ la probabilità che una misura di spin lungo $\mathbf{n}$ dia risultato pari a $\hbar/2$ è pari a $1/4$.
4. Per un pianeta di massa M, raggio R e temperatura T si discutano i vincoli sulle suddette quantità per i quali può esistere un'atmosfera. Che cosa si può dire della composizione dell'atmosfera stessa?
5. La dinamica unidimensionale di una molecola di tipo X–Y–X è descritta, in regime lineare, dall'hamiltoniana
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}\,k\,(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}\,k\,(x_3 - x_2)^2\ .$$
   Determinare le autofrequenze della molecola e descrivere il suo comportamento nei modi normali di oscillazione.
6. Risolvere l'equazione di diffusione
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
   nella regione $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < +\infty\,,\ 0 < x < 1\,\}$, con le condizioni
$$u(t,0) = 0\ , \qquad u(t,1) = 1\ , \qquad \forall t \in \,]\,0, +\infty[\ ,$$
$$u(0,x) = x + \sin 2\pi x\,\cos \pi x\ , \qquad \forall x \in [\,0,1]\ .$$

7. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$, e poniamo $g(x) = f(x)/x$ per $x \neq 0$ e $g(0) = f'(0)$. La g è continua? Se la f è di classe C^2, allora g è di classe C^1? Se la f è di classe C^4, allora g è di classe C^3? Se f è analitica, anche g è analitica? Se f è di classe C^∞, anche g lo è?

8. Per quali valori di α la serie
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$$
converge? Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica definita positiva. Per quali valori di α la serie
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{q(n,m)^\alpha}$$
converge?

9. Sia $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ un insieme finito di primi. Maggiorare asintoticamente il numero di interi composti di tali primi nell'intervallo $[1, N]$, per $N \to \infty$. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio non costante. Minorare asintoticamente la cardinalità dell'insieme $f(\mathbb{N}) \cap [1, N]$. Dimostrare che esistono infiniti primi che dividono qualche valore $f(n)$ per $n \in \mathbb{N}$.

10. Si consideri la curva algebrica $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ di equazione
$$y^2 = x(x-1)(x-2).$$
Si disegni approssimativamente $\mathcal{C}$ e si dimostri che consiste di una componente compatta $\mathcal{C}_1$ e una non compatta $\mathcal{C}_2$. Indicato con $\bar{\mathcal{C}}$ il completamento proiettivo di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, si dimostri che $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus \bar{\mathcal{C}}$ è formato da due componenti connesse, mentre $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ ha tre componenti.

11. Dato un grafo completo non orientato con costi associati agli archi si consideri il problema di determinare un circuito hamiltoniano di costo minimo rispetto alle funzioni di costo
    (a) $c^{(1)}(\tau) = \sum_{e\in\tau} c_e$ (TSP-standard);
    (b) $c^{(2)}(\tau) = \max_{e\in\tau} c_e$ (TSP-bottleneck).

    Si operi una trasformazione del TSP-bottleneck al TSP-standard che consenta di risolvere le istanze del primo con una sola chiamata di una procedura per il TSP-standard.

University of Udine
Ph.D. Program in Mathematics and Physics
Admission exam, academic year 2003/04

Should the candidate develop a dissertation and solve as many problems as possible within 5 hours.

Dissertations

1. Galois' theory.
2. Linear differential forms.
3. Expectation value and conditional expectation value.
4. Flow networks.
5. Symmetry and conservation laws in mechanics and field theory.
6. Monte Carlo methods for the solution of complex systems.
7. Macroscopic and microscopic interpretations of entropy.
8. Analyze a particular case of search for new particles or for new forms of matter/energy in the Universe.

Problems

1. A particle of mass m and relativistic energy E collides with another particle of mass m at rest. What is the angle between the two particles in the laboratory frame after the collision? What is the minimum angle? Compare with the nonrelativistic case.
2. Consider a free electron gas in a uniform magnetic field B. Let n be the average number of electrons per unit volume. Compute:
   (a) the magnetic energy of the gas and its magnetization M as a function of the temperature T;
   (b) the limiting values of the magnetization for $T \to 0$ and $T \to \infty$.
3. In a uniform and constant magnetic field $\mathbf{B}$, at time $t = 0$ an electron is in a spin eigenstate with eigenvalue $\hbar/2$ along a direction orthogonal to $\mathbf{B}$, identified by a unit vector $\mathbf{n}$. Find the values of $t > 0$ for which the probability that a spin measurement along $\mathbf{n}$ give the result $\hbar/2$ is equal to $1/4$.
4. For a planet of mass M, radius R and temperature T, discuss the conditions for which an atmosphere can exist. What can be said about the composition of the atmosphere?
5. The one-dimensional dynamics of a molecule of type X–Y–X is described, in the linear regime, by the Hamiltonian
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M} + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2}\,k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}\,k(x_3 - x_2)^2 \;.$$
   Determine the molecule eigenfrequences, and describe its behaviour when it oscillates in the normal modes.
6. Solve the diffusion equation
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
   in the region $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < +\infty\,,\ 0 < x < 1\,\}$, with the conditions
$$u(t,0) = 0\;, \qquad u(t,1) = 1\;, \qquad \forall t \in\,]\,0, +\infty[\;,$$
$$u(0,x) = x + \sin 2\pi x\, \cos \pi x\;, \qquad \forall x \in [\,0,1]\;.$$

7. Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(0) = 0$, and define $g(x) =: f(x)/x$ for $x \neq 0$ and $g(0) = f'(0)$. Is the function g continuous? If f is of class C^2, does it follow that g is of class C^1? If f is of class C^4, does it follow that g is of class C^3? If f is analytic, does it follow that g is analytic too? If f is of class C^∞, does it follow that g is of class C^∞ too?
8. For what values of α the series
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$$
converges? Let $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a positive definite quadratic form. For what values of α the series
$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{q(n,m)^\alpha}$$
converges?
9. Let $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ be a finite set of prime numbers. Find an asymptotic upper bound for the number of their composites in the interval $[1, N]$, for $N \to \infty$. Let $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ be a nonconstant polynomial. Find an asymptotic lower bound for the cardinality of the set $f(\mathbb{N}) \cap [1, N]$. Finally, prove that there are infinitely many primes that divide some $f(n)$ for $n \in \mathbb{N}$.
10. Consider the algebraic curve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ defined by the equation
$$y^2 = x(x-1)(x-2).$$
Draw a qualitative graph of $\mathcal{C}$ and prove that it consists of a compact component $\mathcal{C}_1$ and a noncompact component $\mathcal{C}_2$. Let $\bar{\mathcal{C}}$ be the projective closure of $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Prove that $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus \bar{\mathcal{C}}$ is the union of two connected components, while $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ has three components.
11. Given a complete indirected graph with costs c_e associated to the edges, consider the problem of determining an Hamiltonian circuit of minimum cost with respect to the following cost functions:
   (a) $c^{(1)}(\tau) = \sum_{e\in\tau} c_e$ (TSP-standard);
   (b) $c^{(2)}(\tau) = \max_{e\in\tau} c_e$ (TSP-bottleneck).

   Propose a tranformation of the TSP-bottleneck into the TSP-standard such that any instance of the TSP-bottleneck can be solved by a single call to a solution procedure for the TSP-standard.