Università degli Studi di Udine
Dottorato di ricerca in Matematica e Fisica
Prova di ammissione, a.a. 2002/03

La prova d'esame comprende quesiti attinenti vari settori disciplinari. Il candidato svolga una dissertazione a scelta e risolva il maggior numero possibile di problemi, nei settori disciplinari preferiti. Il tempo a disposizione è 4 ore.

Dissertazioni

1. Teoremi di esistenza e unicità per le equazioni differenzali ordinarie.
2. Il problema dei minimi quadrati discreti.
3. Variabili e vettori aleatori.
4. Domini di fattorizzazione unica.
5. Meccanica hamiltoniana e formalismo canonico.
6. Il principio di indeterminazione nella meccanica quantistica.
7. Fenomeni di risonanza nella Fisica.
8. Interazioni tra particelle cariche e materia che sono, o potrebbero essere, sfruttate per costruire rivelatori.

Problemi

1. Data la funzione $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da
$$F(x, y) = y^3 \mathrm{e}^x + x^2 \mathrm{e}^y,$$
dimostrare che il luogo Γ degli zeri di F è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Studiare le proprietà qualitative di f e rappresentare graficamente Γ.
2. Sia $f \in C^2(-1, 1)$. Per $0 < h < 1$ si consideri l'espressione
$$D_h[f] = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$
come approssimazione del valore di $f'(0)$. Sia inoltre $\tilde{f} : (-1, 1) \mapsto \mathbb{R}$ una funzione tale che $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$, per $|x| < 1$. Si discuta l'andamento dell'errore $|D_h[\tilde{f}] - f'(0)|$ in funzione di h, ε e se ne trovi la più piccola limitazione superiore per ε fissato.
3. Si consideri la funzione
$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y^2) & \text{se } -1/2 \leq x, y \leq 1/2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
con $k > 0$. Si determini k affinché $f(x, y)$ sia la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale bivariata (X, Y). Se ne calcoli la covarianza e si dica se le componenti marginali X e Y sono indipendenti.
4. Diciamo che una freccia $f : A \to B$ in una categoria $\mathbf{A}$ è *monic* se per ogni $g, h : C \to A$ per cui $fg = fh$ si ha $g = h$. Supponiamo che $\mathbf{A}$ sia una categoria concreta, ovvero in cui ogni oggetto è un insieme e ogni freccia una funzione fra insiemi. Dimostrare che ogni funzione iniettiva è monic. Vale il viceversa? Dimostrare o dare un controesempio. Dualizzare.
5. Sia $f(X) = X^4 + 1$. Dimostrare che f è irriducibile in $\mathbf{Q}[X]$ e che la sua riduzione modulo qualsiasi primo p è riducibile in $\mathbf{F}_p[X]$.
6. Siano $\mathcal{C}$ una circonferenza in $\mathbf{R}^3$, r una retta con $r \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbf{R}^3 \setminus (\mathcal{C} \cup r)$ a seconda della posizione relativa di $\mathcal{C}$ e r.

7. Studiare il moto di una particella di massa m vincolata senza attrito alla superficie di equazione cartesiana $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$, con a costante reale positiva e $z > 0$. Discutere l'esistenza di eventuali integrali primi del moto.

8. Determinare la soluzione $\phi(t, x)$ dell'equazione d'onda non omogenea

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \cos t$$

che soddisfa le condizioni iniziali

$$\phi(0, x) = \frac{1}{1 + x^2}\,, \qquad\qquad \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x) = 0\,.$$

9. In un esperimento fotoelettrico eseguito con luce monocromatica ed un fotocatodo al sodio si trova un potenziale d'arresto di 1.85V per una lunghezza d'onda di 3000Å e di 0.82V a 4000Å. A partire da questi dati si trovi:
   - il valore della costante di Planck;
   - la funzione di lavoro del sodio in eV;
   - la lunghezza d'onda di soglia per il sodio.

10. Dato un gas ideale di N particelle classiche indipendenti di massa m, in una scatola di volume V a temperatura T, si determini la relazione intercorrente tra la pressione esercitata dalle particelle sulle pareti della scatola e la loro velocità quadratica media.

11. Si consideri un solenoide cilindrico infinito, di diametro D, con $n(z)$ spire per unità di lunghezza, attraversato da una corrente I. Si supponga che

$$n(z) = n_0 + n_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right),$$

dove z è la coordinata assiale, $n_1 < n_0$ e $D \ll \lambda$. Si calcoli:
   - il campo magnetico longitudinale lungo l'asse del solenoide;
   - il campo magnetico trasversale in un intorno dell'asse del solenoide.

University of Udine
Ph.D. Program in Mathematics and Physics
Admission exam, academic year 2002/03

This admission exam includes tests concerning variuos mathematical and physical areas. Candidates should choose one dissertation and solve as many problems as possible, in the preferred areas. The allotted time is 4 hours.

Dissertations

1. Existence and uniqueness theorems for solutions of ordinary differential equations.
2. Discrete least square problems.
3. Random variables and random vectors.
4. Unique factorization domains.
5. Hamiltonian mechanics and canonical formalism.
6. The uncertainty principle in Quantum Mechanics.
7. Resonance phenomena in Physics.
8. Interactions of charged particles with matter that are used, or could be used, to construct detectors.

Problems

1. Let the function $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ be defined as
$$F(x,y) = y^3 \mathrm{e}^x + x^2 \mathrm{e}^y,$$
and let Γ be the set of its zeros. Prove that Γ is the graph of a function $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Discuss its qualitative properties and draw Γ.
2. Let $f \in C^2(-1,1)$. For any $0 < h < 1$ consider
$$D_h[f] = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$
as an approximation of $f'(0)$. Moreover, let $\tilde{f} : (-1,1) \mapsto \mathbb{R}$ be a function such that $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$, for $|x| < 1$. Analyze the behaviour of the error $|D_h[\tilde{f}] - f'(0)|$ with respect to h, ε and find its best upper bound for a fixed ε.
3. Let
$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2) & \text{if } -1/2 \leq x, y \leq 1/2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$
with $k > 0$, be the joint density function of a random vector (X,Y). Compute k and the covariance of (X,Y). Are X and Y independent?
4. An arrow $f : A \to B$ in a category $\mathbf{A}$ is *monic* if for every $g, h : C \to A$ with $fg = fh$ the equality $g = h$ holds. Suppose that $\mathbf{A}$ is a concrete category, i.e., the objects of $\mathbf{A}$ are sets with some additional structure and the arrows are maps between sets. Prove that every injective map is monic. Is the converse true? Prove or give a counter-example. Dualize.
5. Let $f(X) = X^4 + 1$. Prove that f is irreducible in $\mathbf{Q}[X]$ and its reduction modulo arbitrary prime p is reducible in $\mathbf{F}_p[X]$.
6. Let $\mathcal{C}$ be a circle in $\mathbf{R}^3$ and let r be a line with $r \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Compute tha the fundamental group of $\mathbf{R}^3 \setminus (\mathcal{C} \cup r)$ depending on the position of $\mathcal{C}$ with respect to r.
7. Study the motion of a particle with mass m, constrained without friction on the surface described, in Cartesian coordinates, by the equation $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$, where a is a positive constant and $z > 0$. Investigate whether there are constants of motion.

8. Find the solution $\phi(t,x)$ of the non homogeneous wave equation

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\cos t$$

with the initial conditions

$$\phi(0,x)=\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x)=0\,.$$

9. In a photoelectric experiment using monocromatic light and a sodium photocatode, we measure a stopping potential of 1.85V for $\lambda = 3000\text{Å}$ and of 0.82V for $\lambda = 4000\text{Å}$. From these data determine:
   - a value for Planck's constant;
   - the work function of sodium in eV;
   - the threshold wavelength for sodium.

10. Given an ideal gas of N independent classical particles with mass m, contained in a box of volume V at temperature T, determine the relation between the pressure of the particles on the walls of the box and their mean square velocity.

11. A current I passes throgh an infinite cylindrical solenoid of diameter D and $n(z)$ windings per unit length. Supposing that

$$n(z)=n_0+n_1\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right),$$

where z is the axial coordinate, $n_1 < n_0$ and $D \ll \lambda$,
   - find the value of the longitudinal magnetic field along the axis of the solenoid;
   - find the value of the transverse magnetic field near the axis of the solenoid.