Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema A

12 Novembre 2001

Dissertazioni. Svolgerne *una sola*. Delineare la teoria generale, dimostrare almeno un risultato significativo, e mostrare almeno un esempio di applicazione.

1. Forme dell'assioma della scelta.
2. Teoria di Galois.
3. Introduzione all'integrale di Lebesgue sulla retta reale.
4. Superfici di Riemann compatte.
5. La legge debole dei grandi numeri.
6. Moto di un sistema meccanico conservativo in n dimensioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.
7. Convergenza di metodi iterativi per risolvere sistemi di equazioni lineari.
8. La dualità nella programmazione lineare.

Esercizi. Svolgerne *quanti più ne potete.*

1. L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ha cardinalità $2^{\aleph_0}$.
2. Un dominio di integrità infinito con un numero finito di elementi invertibili ha infiniti ideali massimali.
3. La funzione di variabile reale $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x\sqrt{2})$ è periodica? (Posto T un periodo di f, studiare la periodicità di $x \mapsto \operatorname{sen}(x+T) - \operatorname{sen} x$).
4. Esiste una sola funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrabile e tale che $f(x) = (1/2)\cdot\int_0^1 \arctan(x + f(t))dt$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e tale f è continua e limitata.
5. La curva algebrica $X^n - Y^n = Z^n$ in $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ non è razionale quando $n \geq 3$.
6. Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con comune funzione di ripartizione $F(x)$. Per $x \in \mathbb{R}$ ed $n \geq 1$ fissati definiamo la variabile casuale $Y_{x,n}$ come $Y_{x,n} = 1$ se $X_n \leq x$ e $Y_{x,n} = 0$ se $X_n > x$. Studiare la convergenza in probabilità della successione $\{\bar{Y}_{x,n}\}_{n\geq 1}$, dove $\bar{Y}_{x,n} = \sum_{i=1}^{n} Y_{x,i}/n$, con interpretazione statistica.
7. Una particella di massa m e carica elettrica q è immersa in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ perpendicolari fra loro ed omogenei. Trovare le equazioni del moto e discuterne le soluzioni.
8. Sia I la matrice identità di ordine n, e $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Sia inoltre $\mathcal{M}$ l'insieme delle matrici della forma $aI + b\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, per $a, b, \in \mathbb{C}$, e sia $A \in \mathcal{M}$. Dimostrare che se A è invertibile allora $A^{-1} \in \mathcal{M}$ e trovare un algoritmo efficiente per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, valutandone il costo computazionale.
9. Dato un grafo non orientato e bipartito, dimostrare, sfruttando il concetto di dualità, che la soluzione del problema della minima copertura di nodi e la soluzione del problema dell'accoppiamento di cardinalità massima hanno lo stesso numero di elementi.

Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema A

12 Novembre 2001

Essays. Write *one essay only.* Outline the general theory, prove at least one meaningful result, and show at least an application example.

1. Forms of the Choice Axiom.
2. Galois Theory.
3. Introduction to Lebesgue integral on the real line.
4. Compact Riemann surfaces.
5. The weak law of large numbers.
6. The dynamic of a conservative mechanical system in dimension n around a position of stable equilibrium.
7. Convergence of iterative methods to solve systems of linear equations.
8. Duality in linear programming.

Problems. Solve *as many as you can.*

1. The set of the continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ has cardinality $2^{\aleph_0}$.
2. An infinite integral domain with a finite number of invertibile elements has infinitely many maximal ideals.
3. Is the real variable function $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ periodic? (If T is a period for f, look at the periodicity of $x \mapsto \sin(x+T) - \sin x$).
4. There exists one and only one locally integrable function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(x) = (1/2) \cdot \int_0^1 \arctan(x + f(t))dt$ for mall $x \in \mathbb{R}$, and such f is continuous and bounded.
5. The algebraic curve $X^n - Y^n = Z^n$ in $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ is not rational when $n \geq 3$.
6. Let $\{X_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence of independent random variables with the same distribution function. For fixed $x \in \mathbb{R}$ and $n \geq 1$ define the random variable $Y_{x,n}$ as $Y_{x,n} = 1$ if $X_n \leq x$ and $Y_{x,n} = 0$ if $X_n > x$. Study the convergence in probability of the sequence $\{\bar{Y}_{x,n}\}_{n\geq 1}$, where $\bar{Y}_{x,n} = \sum_{i=1}^n Y_{x,i}/n$. Give a statistical interpretation of the result.
7. A particle with mass m and electric charge q is floating in an electric field $\mathbf{E}$ and a magnetic field $\mathbf{B}$ orthogonal to each other and homogeneous. Find the equations of motion and discuss the solutions.
8. Let I be the $n \times n$ identity matrix, and $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Moreover, let $\mathcal{M}$ be the set of the matrices of the form $aI + b\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, for $a, b, \in \mathbb{C}$, and let $A \in \mathcal{M}$. Prove that if A is invertible then $A^{-1} \in \mathcal{M}$ and find an efficient algorithm to solve the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, estimating its computational cost.
9. Given an oriented and bipartite graph, prove, using duality, that the solution to the problem of the minimum covering of nodes and the solution to the coupling problem with maximum cardinality have the same number of elements.

Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema B

12 Novembre 2001

Dissertazioni. Svolgerne *una sola.* Delineare la teoria generale, dimostrare almeno un risultato significativo, e mostrare almeno un esempio di applicazione.

1. Il teorema della compattezza per la logica del prim'ordine.
2. Teoremi di Sylow e loro generalizzazioni.
3. Massimi e minimi vincolati.
4. Forme quadratiche.
5. Il teorema del limite centrale.
6. Simmetrie e leggi di conservazione in Meccanica.
7. Metodi di Eulero per equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine.
8. Programmazione lineare intera.

Esercizi. Svolgerne *quanti più ne potete.*

1. Dimostrare che il funtore che associa ad ogni dominio d'integrità il suo campo dei quozienti è aggiunto al funtore di inclusione dalla categoria dei campi in quella dei domini d'integrità.
2. Un dominio di ideali principali infinito con un numero finito di elementi invertibili ha infiniti elementi primi.
3. Qual'è la cardinalità dell'insieme degli aperti di $\mathbb{R}$?
4. Sia I un intervallo aperto e limitato di $\mathbb{R}$ ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto per la quale esista una costante $c > 0$ tale che $|f'(x)| \leq c|f(x)|$ per ogni $x \in I$. Allora o f è identicamente nulla o non si annulla mai, e ha limite finito $\neq 0$ agli estremi di I.
5. Il gruppo SO(3) delle rotazioni dello spazio tridimensionale, con la topologia canonica, è una varietà differenziabile compatta di dimensione tre.
6. Sia $0 < p < 1$. Per ogni $n \geq 1$ sia X_n una variabile casuale con supporto $\{k/n : k = 0, 1, \ldots, n\}$ e funzione di probabilità data da $f_{X_n}(k/n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ per $k = 0, 1, \ldots, n$, e $f_{X_n}(x) = 0$ altrimenti. Trovare la funzione generatrice dei momenti (trasformata di Laplace) di X_n, e studiare la convergenza in distribuzione (legge) della successione $\{X_n\}_{n \geq 1}$.
7. Una particella di massa m e carica elettrica q è immersa in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ paralleli fra loro ed omogenei. Trovare le equazioni del moto e discuterne le soluzioni.
8. Siano I la matrice identità di ordine n, $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, $a, b, \in \mathbb{C}$ e $A = aI + b\mathbf{v}\mathbf{v}^T$. Dimostrare che gli unici autovalori distinti di A sono a e $a + nb$, e discutere la convergenza del metodo iterativo di Jacobi per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
9. Sia (N, A) un grafo diretto in cui a ogni arco $(i, j) \in A$ è assegnata una capacità $c_{i,j} > 0$. Associamo a ogni sottinsieme di nodi $S \subset N$ la *capacità del taglio* $f(S) = \sum_{i \in S, j \in N \setminus S} c_{i,j}$. Questa f è submodulare, cioè $f(S \cup T) + f(S \cap T) \leq f(S) + f(T)$ per ogni $S, T \subset N$.

Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema B

12 Novembre 2001

Essays. Write *one essay only.* Outline the general theory, prove at least one meaningful result, and show at least an application example.

1. The compactness theorem for first-order logic.
2. Sylow theorems and generalizations.
3. Constrained maxima and minima.
4. Quadratic forms.
5. The central limit theorem.
6. Symmetries and conservations laws in Mechanics.
7. Euler methods for differential equations of the first order.
8. Integer linear programming.

Problems. Solve *as many as you can.*

1. The functor that associates to a commutative domain its quotient field is adjoint to the inclusion functor from the category of fields to the category of domains.
2. An infinite principal ideals domain with a finite number of invertibile elements has infinitely many prime elements.
3. What is the cardinality of the family of the open subsets of $\mathbb{R}$?
4. Let I be a open bounded interval in $\mathbb{R}$, and $f\colon I \to \mathbb{R}$ a differentiable function, for which there is a constant $c > 0$ such that $|f'(x)| \leq c|f(x)|$ for all $x \in I$. Then either f vanishes identically or it never vanishes, and it has finite nonzero limits at the extremum points of I.
5. The group SO(3) of the rotations of the three-dimensional space, equipped with the canonical topology, is a compact differentiable variety of dimension three.
6. Let $0 < p < 1$. For each $n \geq 1$ let X_n be a random variable with support $\{k/n \ : \ k = 0, 1, \dots, n\}$ and probability function $f_{X_n}(k/n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ for $k = 0, 1, \dots, n$, and $f_{X_n}(x) = 0$ otherwise. Compute the moments generating function (Laplace transform) of X_n, and study the convergence in distribution (law) of the sequence $\{X_n\}_{n \geq 1}$.
7. A particle with mass m and electric charge q is floating in an electric field $\mathbf{E}$ and a magnetic field $\mathbf{B}$ parallel to each other and homogeneous. Find the equations of motion and discuss the solutions.
8. Let I be the $n \times n$ identity matrix, $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, $a, b, \in \mathbb{C}$ e $A = aI + b\mathbf{v}\mathbf{v}^T$. Prove that the only distinct eigenvalues of A are a and $a + nb$, and discuss the convergence of the Jacobi iterative method to solve the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
9. Let (N, A) be a directed graph where a capacity $a_{i,j} > 0$ is assigned to each arc $(i, j) \in A$. Let us associate to each node subset $S \subset N$ the *cut capacity* $f(S) = \sum_{i \in S, j \in N \setminus S} c_{i,j}$. Then this f is submodular, that is, $f(S \cup T) + f(S \cap T) \leq f(S) + f(T)$ for all $S, T \subset N$.

Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema C

12 Novembre 2001

Dissertazioni. Svolgerne *una sola*. Delineare la teoria generale, dimostrare almeno un risultato significativo, e mostrare almeno un esempio di applicazione.

1. Concetti di base della Teoria della Ricorsività.
2. Campi finiti.
3. Serie di potenze reali o complesse.
4. Rivestimenti.
5. Varie nozioni di convergenza per variabili casuali.
6. Moto di un sistema meccanico unidimensionale attorno a una posizione di equilibrio stabile in presenza di una forza dissipativa di attrito proporzionale alla velocità del sistema.
7. Formule di quadratura interpolatorie per gli integrali propri.
8. Flusso massimo in un grafo orientato con vincoli di capacità sugli archi.

Esercizi. Svolgerne *quanti più ne potete.*

1. Sia L un linguaggio finito nella logica al prim'ordine con uguaglianza, e sia T una teoria in L avente un numero finito di assiomi. Sia γ_n un enunciato che asserisce che esistono esattamente n individui. Dimostrare che l'insieme dei teoremi di T della forma $\gamma_n \to \alpha$ ($n \geq 1$, α enunciato di L) è decidibile.
2. Descrivere tutti i gruppi di ordine p^2q^2 quando p, q sono primi gemelli ($q = p + 2$).
3. Calcolare il $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{-a}dx$ per $0 \leq a < 1$.
4. Descrivere le soluzioni dell'equazione differenziale $x'' + x^2 = 1$ nel piano delle fasi.
5. Calcolare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(X) = X^4 + X^2 - 3$.
6. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale costituito da variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite, con funzione di densità di probabilità $f(x) = 1/\theta$ se $0 \leq x \leq \theta$ e $f(x) = 0$ altrove, con $0 < \theta < +\infty$ un parametro non noto. Di θ calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza e lo stimatore basato sul metodo dei momenti. Sono stimatori distorti?
7. Una particella di massa m e carica elettrica q è immersa in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ omogenei e posti ad un angolo relativo θ. Trovare le equazioni del moto e discuterne le soluzioni.
8. Sia $f \in C^2(-1, 1)$. Il valore di $f(x)$ è calcolabile con un errore non più grande di $\epsilon > 0$. Per $0 < h < 1$ approssimiamo $f'(0)$ con $D_h = (f(h) - f(-h))/h$. Discutere l'errore $|D_h - f'(0)|$ in funzione di ϵ, h e trovarne la stima ottima. Ripetere la discussione sostituendo a D_h il valore $E_h = p'(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio di primo grado che minimizza lo scarto $(p(-h) - f(-h))^2 + (p(0) - f(0))^2 + (p(h) - f(h))^2$.
9. Per quali valori di a_1, a_2, b_1, b_2 il poliedro $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x_1 - x_2 + a_1x_3 \leq b_1,\ -x_1 + 2x_2 + a_3x_3 \leq b_2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ è non vuoto?

Dottorato di Ricerca in Matematica, XVII Ciclo

Prova di Ammissione, Tema C

12 Novembre 2001

Essays. Write *one essay only*. Outline the general theory, prove at least one meaningful result, and show at least an application example.

1. Basics of Recursion Theory.
2. Finite fields.
3. Real or complex power series.
4. Covering spaces.
5. Various notions of convergence for random variables.
6. Dynamic of a one-dimensional mechanical system around a stable equilibrium in the presence of a dissipative friction proportional to the system speed.
7. Interpolative quadrature formulas for proper integrals.
8. The maximum flow in an oriented graph with constraints on the arc capacity.

Problems. Solve *as many as you can.*

1. Let L be a finite language in first order logic with equality, and let T be a finitely axiomatized theory in L. Let γ_n be a sentence asserting the existence of exactly n individuals. Prove that the set of theorems of T of the form $\gamma_n \to \alpha$ ($n \geq 1$, α a sentence in L) is decidable.
2. Describe all groups of order p^2q^2, where $3 < p < q = p + 2$ are twin prime numbers.
3. Compute the $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{-a}dx$ for $0 \leq a < 1$.
4. Describe the solutions of the differential equation $x'' + x^2 = 1$ in the phase plane.
5. Compute the Galois group over $\mathbb{Q}$ of the polynomial $f(X) = X^4 + X^2 - 3$.
6. Let $X_1, \ldots, X_n$ be a sample of independent and identically distributed random variables, with probability density function $f(x) = 1/\theta$ if $0 \leq x \leq \theta$ and $f(x) = 0$ elsewhere, with $0 < \theta < +\infty$ an unknown parameter. For θ compute the maximum likelihood estimator and the estimator based on the moment method. Are they biased estimators?
7. A particle with mass m and electric charge q is floating in an electric field $\mathbf{E}$ and a magnetic field $\mathbf{B}$, both homogeneous and at an angle θ to each other. Find the equations of motion and discuss the solutions.
8. Let $f \in C^2(-1, 1)$. The value of $f(x)$ is known up to an error not larger than $\epsilon > 0$. For $0 < h < 1$ let us approximate $f'(0)$ with $D_h = (f(h)-f(-h))/h$. Discuss the error $|D_h - f'(0)|$ as a function of ϵ, h and find its best estimate. Do the same replacing D_h with $E_h = p'(0)$, where $p(x)$ the first-degree polynomial that minimizes $(p(-h) - f(-h))^2 + (p(0) - f(0))^2 + (p(h) - f(h))^2$.
9. For which values of a_1, a_2, b_1, b_2 is the polyhedron $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2x_1 - x_2 + a_1x_3 \leq b_1,\ -x_1 + 2x_2 + a_3x_3 \leq b_2,\ a_2 + x_2 + x_3 = 0\}$ nonempty?